Université de Picardie Jules Verne 20121-2013

UFR des Sciences M1S1 Distributions.

Dm 1. Distributions à support ponctuel.

Exercice 1. 1. Pour tout α, on a que $\partial^\alpha \delta_0$ est une distribution de support 0 car δ_0 est une distribution de support $\{0\}$.

2. T est d'ordre fini car à support compact. Soit h une fonction plateau sur $B(0,1/2)$ à support compact dans $B(0,1)$. On pose $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon)$ qui est à support dans $B(0,\varepsilon)$). On a alors : $\langle T,\psi\rangle = \langle T, h_\varepsilon\psi\rangle$ (car $h_\varepsilon\psi - \psi$ est identiquement nulle sur un voisinage de 0). On écrit alors la continuité de T sur $\overline{B(0,1)}$ ($h_\varepsilon\psi$ a son support dans $\overline{B(0,1)}$) :
$$|\langle T,\psi\rangle| = |\langle T, h_\varepsilon\psi\rangle| \leq C\|h_\varepsilon\psi\|_{C^k},$$
où C et k de dépendent pas de ψ. Soit α tel que $|\alpha| \leq k$, alors la formule de Leibnitz donne :
$$\partial^\alpha(h_\varepsilon\psi) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}h_\varepsilon\partial^\beta\psi.$$
Et donc :
$$\|\partial^\alpha(h_\varepsilon\psi)\|_\infty \leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|\partial^{\alpha-\beta}h_\varepsilon\|_\infty\|\partial^\beta\psi\|_\infty.$$
On $\partial^{\alpha-\beta}h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}h)(x/\varepsilon)$. On peut donc majorer :
$$\|\partial^{\alpha-\beta}h_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{-|\alpha-\beta|}\|\partial^{\alpha-\beta}h\|_\infty \leq C_1\varepsilon^{-|\alpha-\beta|}$$
où C_1 est une constante qui ne dépend que de h et de ses dérivées à l'ordre $\leq k$. D'où :
$$\|\partial^\alpha(h_\varepsilon\psi)\|_\infty \leq C_2\sum_{\beta\leq\alpha}\varepsilon^{-|\alpha-\beta|}\|\psi\|_{C^k},$$
où C_2 est une constante qui ne dépend que de k et h. D'où :
$$\|h_\varepsilon\psi\|_{C^k} \leq C_3\sum_{\alpha,|\alpha|\leq k}\varepsilon^{-k+|\alpha|}\|\partial^\alpha\psi\|_{L^\infty(B(0,\varepsilon))},$$
où C_3 ne dépend pas de ε ni de ψ (mais de h et de k).

3. Soit ψ qui a toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre k, alors $\psi = o(\|x\|^k)$ (developpement limité). De même, $\partial^\alpha\psi = o(\|x\|^{k-|\alpha|}$ Donc pour ε assez petit, on a que $\varepsilon^{-k+|\alpha|}\|\partial^\alpha\psi\|_{L^\infty(B(0,\varepsilon))}$ est arbitrairement petit. D'où : $\langle T,\psi\rangle = 0$.

4. Si ψ_1 et ψ_2 ont les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre k alors $\langle T,\psi\rangle = 0$ pour $\psi = \psi_1 - \psi_2$, le résultat suit.

5. Le noyau de T est contient l'intersection des noyaux des $\partial^\alpha\delta_0$, c'est donc bien une combinaison linéaire de ces éléments.