Fonctions tests et distributions

1 Définitions des distributions

1.1 Fonctions tests

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère l'espace de fonctions *tests* suivant :

Definition 1.1. *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. On note $\mathcal{D}(K)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K.*

On le munit de la convergence suivante :

Definition 1.2. *Une suite φ_n de $\mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ si*
- *il existe un compact $K \in \Omega$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$.*
- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{C^k} = 0$.*

La première condition, dite du *support captif*, force la fonction φ à avoir encore son support dans K. Sans cette condition, une limite de fonctions de $\mathcal{D}$ pourrait être dans C_0^∞. La deuxième condition implique la convergence uniforme de toutes les derivées. Bien sûr, plus l'ordre de dérivation est important, plus la vitesse de convergence peut-être lente.

1.2 Définition des distributions.

Comme pour les mesures de Radon, on définit alors l'espace des distributions par dualités :

Definition 1.3. *On appelle distribution une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie : pour tout compact $K \in \Omega$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ et une constante C_K telle que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K),\ |\langle T, \varphi\rangle| \le C_K \|\varphi\|_{C^k},$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le crochet de dualité.

On note $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions.

Les distributions sont les formes linéaires continues pour la notion de convergence définie sur $\mathcal{D}$.

Proposition 1.4. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, il y a alors équivalence entre :*
- *T est une distribution ;*
- *Pour toute suite φ_n de $\mathcal{D}$ qui tend vers φ dans $\mathcal{D}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Preuve. Supposons que $T \in \mathcal{D}'$ et soit φ_n de $\mathcal{D}$ qui tend vers φ. Il existe alors un compact K tel que le support des φ_n est dans K et donc il existe une constante C_K et un ordre k tel que :

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle| \le C_K \|\varphi_n - \varphi\|_{C^k}.$$

On en déduit $\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ en passant à la limite.

Dans l'autre sens, supposons que T n'est pas une distribution. Alors, il existe un compact K tel que, pour tout k et C, on ait $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ non nulle telle que $|\langle T, \varphi\rangle| \ge C\|\varphi\|_{C^k}$. On pose

$k = C = n$ et on note φ_n la fonction ainsi construite. Quitte à multiplier φ_n par -1, on peut supposer $\langle T, \varphi_n\rangle = |\langle T, \varphi_n\rangle|$. On considère alors la suite :

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{\langle T, \varphi_n\rangle}.$$

On a alors pour $k \leq n$ que $\|\psi_n\|_{C^k} \leq 1/n$ qui tend vers 0. Donc ψ_n tend vers 0 dans $\mathcal{D}$ mais $\langle T, \psi_n\rangle$ tend vers 1. Le résultat est prouvé. $\square$

1.3 Ordre d'une distribution.

Definition 1.5. *Soit $T \in \mathcal{D}$ telle qu'il existe k indépendant de K dans*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \langle T, \varphi\rangle \leq C_K \|\varphi\|_{C^k}.$$

On dit alors que T est d'ordre fini *et on appelle ordre de T le plus petit k qui convient.*

On aurait pu aussi définir l'espace $\mathcal{D}^s$ comme l'espace des fonctions C^s à support compact (muni de la convergence C^s et de la condition de support captif). En définissant alors son dual avec la condition de support (i.e, $T \in (\mathcal{D}^s)'$ si pour tout compact K, il existe une constante C_K telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^s(K)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{C^s}$). On peut alors montrer que les distributions d'ordre s s'identifie à l'espace $(\mathcal{D}^s)'$ (ce n'est pas très difficile).

2 Exemples.

2.1 L^1_{loc}

Proposition 2.1. *L'application*

$$\begin{aligned} L^1_{loc} &\to \mathcal{D}' \\ f &\mapsto T_f \end{aligned}$$

où $\langle T_f, \psi\rangle := \int_\Omega f\psi$ est bien définie et injective. La distribution T_f est d'ordre 0 et on la note plus simplement f.

Preuve On a

$$|\int_\Omega f\psi| \leq \|\psi\|_\infty \|f\|_{L^1(K)}$$

pour $\psi \in \mathcal{D}(K)$. Cela donne que l'application est bien définie et que T_f est d'ordre 0.

Pour l'injectivité, soit f telle que $T_f = 0$. Montrons que $f = 0$ presque partout. Le résultat est local on travaille donc sur un compact K. Soit ρ_ε une approximation de l'identité. On a alors $\langle T_f, \rho_\varepsilon(x - t)\rangle = 0$ pour tout $x \in K$ (on prend ε assez petit pour que $t \mapsto \rho_\varepsilon(x - t)$ soit à support dans Ω). On reconnaît $f \star \rho_\varepsilon = 0$ sur K et comme $f \star \rho_\varepsilon \to f$ dans L^1_K, on en déduit $f = 0$. $\square$

Cela justifie certaines expressions que l'on rencontre souvent dans la pratique des distributions : "soit T une distribution dans L^p..." cela signifie qu'il existe une fonction $f \in L^p$ telle que $T_f = T$.

2.2 Les mesures de Radon

Comme toute fonction lisse est a fortiori continue, il est clair que les mesures de Radon définissent des distributions d'ordre 0 (voir le cours précédent). La densité des fonctions de $\mathcal{D}$ dans C_c pour la norme infinie implique que $M_{loc} \to \mathcal{D}'$ est injective.

Definition 2.2. *Supposons que $0 \in \Omega$. On appelle masse de Dirac en 0 l'élément de $\mathcal{D}'$ défini par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \langle \delta_0, \psi \rangle = \psi(0).$$

C'est une mesure de Radon qui n'est pas une fonction.

Un autre exemple est le peigne de Dirac sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle P, \varphi \rangle := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(i).$$

Pourquoi est-ce bien défini ?

Plus généralement : toute distribution d'ordre 0 est en fait une mesure de Radon (pourquoi ?).

2.3 La valeur principale

On pourrait donner des exemples de distribution qui ne sont pas d'ordre 0 en prenant des objets de la forme :

$$\langle T, \psi \rangle = \psi'(0),$$

mais on étudiera de tels objets au chapitre suivant (avec l'outils de la dérivation au sens des distributions). Voici un exemple intéressant de distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$:

Definition 2.3. *On définit la valeur principale de $1/x$ d'une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par :*

$$\langle v.p(1/x), \psi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\psi}{x} dx.$$

Proposition 2.4. *La valeur principale de $1/x$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre 1.*

Preuve. Par la formule de Taylor, on peut écrire tout élément de $\mathcal{D}$ comme $\psi(0) + x\psi_1(x)$ où $\psi_1(x) = \int_{[0,1]} \psi'(xt)dt$ est lisse (mais pas forcément à support compact). Soit Θ, une fonction plateau paire, égale à 1 sur le support de ψ. On a alors :

$$\psi(x) = \psi(0)\theta(x) + x\psi_1(x)\theta(x),$$

de telle sorte que $\psi_1(x)\theta(x) \in \mathcal{D}$. On a alors par parité que :

$$\begin{aligned} \langle v.p(1/x), \psi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \psi_1(x)\theta(x)dx. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_1(x)\theta(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{[0,1]} \psi'(xt)\theta(x)dtdx \end{aligned}$$

On en déduit bien que $v.p(1/x)$ définit une distribution d'ordre 1 (on a montré en fait d'ordre ≤ 1 mais on laisse en exercice que $v.p(1/x)$ n'est pas d'ordre 0). $\square$

Un autre exemple, que l'on fera en exercice, est la partie finie de $1/|x|^\alpha$.

3 Convergence des distributions

On veut définir différentes propriétés des distributions : multiplication par des fonctions tests, convolution, restriction, dérivation ... Du point de vue de l'analyse, donner un sens à ces opérations implique de les définir de manière continue. Il faut pour cela définir une notion de continuité pour les distributions. Il est possible de définir une topologie adaptée à ce problème (et c'est l'un des apports de Schwartz). En pratique, cela n'est pas nécessaire (et pas dans ce cours), il est suffisant de parler de convergence de suite de distributions :

Definition 3.1. *Une suite T_n de distributions converge vers T si :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \lim_n \langle T_n, \psi \rangle \to \langle T, \psi \rangle.$$

On dit alors que $T_n \to T$ au sens des distributions.

Exercice 1. Montrer que si $u_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$, alors $\delta_{u_n} \to \delta_0$ au sens des distributions.

A partir de maintenant, lorsqu'une opération sera dite continue sur les distributions (ou au sens des distributions), on entendra que l'image d'une suite convergente est une suite convergente et que l'image de la limite est la limite des images.

4 Premières opérations sur les distributions

4.1 Restriction

Proposition 4.1. *Soit $\Omega \subset \Omega'$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Omega')$ peut être restreinte en une distribution $T_{|\Omega}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \mapsto T_{|\Omega}$ est continue au sens des distributions.*

C'est totalement immédiat. Par contre il est plus intéressant de remarquer que l'on ne peut pas prolonger les distributions en général. Par exemple, $1/|x|$ définit une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ qui n'admet pas de prolongement à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

4.2 Multiplication par des fonctions

Proposition 4.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$ alors la distribution fT définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \langle fT, \psi \rangle := \langle T, f\psi \rangle$$

est bien définie et dépend continûment de T au sens des distributions.

Par ailleurs, si T est d'ordre fini, on a que $\mathrm{ordre}(fT) \leq \mathrm{ordre}(T)$.

Preuve. Déjà, $\langle fT, \psi \rangle$ est bien défini car $f\psi$ est une fonction lisse à support compact. La linéarité de fT est clair. Soit K un compact tel que $\mathrm{supp}(\psi) \subset K$. Alors, il existe C_K et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\theta \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle T, \theta \rangle| \leq C_K \|\theta\|_{C^k}.$$

On applique à $f\psi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle T, \theta \rangle| \leq C_K \|f\psi\|_{C^k}.$$

Or, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$, on a :

$$\partial^\alpha (f\psi) = \sum_{i_n=0}^{\alpha_n} \cdots \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_n}{i_n} \cdots \binom{\alpha_1}{i_1} \partial^{i_n} \ldots \partial^{i_1} f \partial^{\alpha_n - i_n} \partial^{\alpha_1 - i_1} \psi.$$

Avec des notations adaptées, cette formule peut s'écrire :

$$\partial^\alpha(f\psi) = \sum_{i,\ i\leq\alpha} \binom{\alpha}{i} \partial^i f \partial^{\alpha-i}\psi.$$

Comme $f \in C^\infty$, ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont uniformément bornées sur K, les coefficients binomiaux aussi et donc on obtient :

$$\|f\psi\|_{C^k} \leq C'\|\psi\|_{C^k},$$

où C' est une constante qui dépend de f et de K (mais pas de ψ). On en déduit :

$$|\langle T, \theta\rangle| \leq C'_K\|\psi\|_{C^k},$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Remark 4.3. On a en fait montré l'énoncé plus précis :" $(f, T) \mapsto fT$ est continue où l'on munit C^∞ de la convergence uniforme sur les compacts"'.

Remark 4.4. On peut avoir ordre$(fT) <$ ordre(T) (par exemple si $f = 0$).

Remark 4.5. Si f n'est que de classe C^s, on ne peut pas définir fT en général. Mais c'est en fait possible si T est une distribution d'ordre s.

Remark 4.6. Un cas particulèrement intéressant est celui où f est une fonction plateau pour K compact. On peut dans ce cas-là construire une distribution fT qui coincide avec T pour les fonctions à support dans K et à support compact (la notion de support d'une distribution sera définie bientôt).

4.3 Recollement

Lemma 4.7. *Soit $\Omega = \cup_i\Omega_i$ un ouvert recouvert par des ouverts. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que pour toute i, $T_{|\Omega_i} = 0$. Alors $T = 0$.*

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K, on considère $\cup_{1\leq i\leq n}U_i$ un recouvrement ouvert de K et une partition de l'unité (θ_i) associée à ce recouvrement. On a alors $\psi = \sum_{1\leq i\leq n}\theta_i\psi$. Notons $\psi_i = \theta_i\psi$, alors $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$. Donc $0 = \langle T_{|\Omega_i}, \psi_i\rangle = \langle T, \psi_i\rangle$. Par linéarité de T, il vient alors que $\langle T, \psi\rangle = 0$. $\square$

Lemma 4.8. *Soit $\Omega = \cup_i\Omega_i$ un ouvert recouvert par des ouverts. Pour tout i, soit $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ telle que pour tout i et j, $(T_i)_{|\Omega_j} = (T_j)_{|\Omega_i}$. Alors, il existe une unique $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_{|\Omega_i} = T_i$ pour tout i. Si chaque T_i est d'ordre au plus k alors T est d'ordre k.*

Preuve. L'unicité provient directement du lemme précédent.

Soit K compact, on considère $\cup_{1\leq i\leq n}U_i$ un recouvrement ouvert de K et une partition de l'unité (θ_i) associée à ce recouvrement. Pour $\psi \in \mathcal{D}(K)$, on pose alors :

$$\langle T, \psi\rangle := \sum_{i=1}^{n}\langle T_i, \theta_i\psi\rangle.$$

On a que $\langle T, \psi\rangle$ ne dépend pas du choix des U_i ni des θ_i. En effet, soient $\cup_{1\leq i\leq n'} U'_i$ et (θ'_i), on a alors :

$$\begin{aligned}
\langle T, \psi\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle T_i, \theta_i \psi\rangle \\
&= \sum_{i\leq n,\ j\leq n'} \langle T_i, \theta_i \theta'_j \psi\rangle \\
&= \sum_{i\leq n,\ j\leq n'} \langle T_j, \theta_i \theta'_j \psi\rangle \\
&= \sum_{j\leq n'} \langle T_j, \theta'_j \psi\rangle,
\end{aligned}$$

où l'on a bien sûr utilisé que $(T_i)_{|\Omega_j} = (T_j)_{|\Omega_i}$. Le reste de la preuve suit. □

4.4 Support

On étend la notion de support aux distributions :

Definition 4.9. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T, noté* $\mathrm{supp}(T)$ *le complémentaire du plus grand ouvert U sur lequel T est nulle pour toute fonction à support dans U.*

Si $T = T_f$ est dans L^1_{loc}, alors $\mathrm{supp}(T) = \mathrm{supp}(f)$ (autrement dit, la notion de support de distribution étant celle de fonction). On a la propriété suivante :

Proposition 4.10. *Soit T une distribution à support compact, alors*

- *T est d'ordre fini et il existe un compact $K' \supset \mathrm{supp}(T)$ et une constante C tel que :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ |\langle T, \psi\rangle| \leq C\|\psi\|_{C^k(K')}.$$

- *Notons, $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact, alors $\mathcal{E}'(\Omega)$ peut être identifié avec le dual de C^∞ (muni de la convergence C^∞ sur les compacts).*

Preuve. Pour le premier point, soit Θ une fonction plateau pour $\mathrm{supp}(T)$ et soit K' son support. On a alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi = (1-\Theta)\varphi + \Theta\varphi$:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \Theta\varphi\rangle.$$

on applique alors la continuité de T sur K' et le résultat suit. Le deuxième point est une conséquence directe du premier. □

4.5 Translation, dilatation

On suppose ici que $\Omega = \mathbb{R}^n$. On procède toujours de la même manière pour définir une opération sur les distributions, on la définit pour $f \in L^1_{loc}$ (par exemple). En écrivant le crochet de dualité, on fait porter l'opération sur les fonctions tests. On étend alors l'opération à $\mathcal{D}'$. Par exemple, soit $h \in \mathbb{R}^n$. Pour $f \in L^1_{loc}$, on a $\tau_h f := f(x-h)$ et donc :

$$\langle \tau_h f, \psi\rangle = \int f(x-h)\psi(x)dx = \int f(x)\psi(x+h)dx = \langle f, \tau_{-h}\psi\rangle.$$

Cela amène à la définition-proposition :

Definition 4.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on appelle $\tau_h T$ la distribution définit par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \langle \tau_h T, \psi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\psi \rangle.$$

Remark 4.12.
1. On a bien prolongé la notion de translation aux distributions.
2. La translation est un opérateur continu au sens des distributions (le vérifier).
3. On voit qu'en fait même si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\tau_h T$ est une distribution sur $\tau_h(\Omega)$, c'est particulièrement intéressant dans le cas de domaine du type "bande".
4. L'ordre de $\tau_h T$ est celui de T. Le support de $\tau_h T$ est $\tau_h(\mathrm{supp} T)$.

On souhaite maintenant dilater par $\lambda \neq 0$ les distributions. Pour $f \in L^1_{loc}$, on a la formule $D_\lambda f = f(\lambda x)$. On pose alors :

Definition 4.13. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on appelle $D_\lambda T$ la distribution définit par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \langle D_\lambda T, \psi \rangle = \frac{1}{|\lambda|^n} \langle T, D_{1/\lambda}\psi \rangle.$$

Remark 4.14.
1. On a bien prolongé la notion de dilatation aux distributions (le vérifier).
2. La dilatation est un opérateur continu au sens des distributions (le vérifier), l'ordre de $D_\lambda T$ est celui de T. Le support de $D_\lambda T$ est $D_\lambda(\mathrm{supp} T)$.

Definition 4.15. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on dit que T est homogène de degré m si*

$$D_\lambda T = \lambda^m . T$$

Exercice 2.
1. *Montrer que δ_0 est homogène. De quel degré ? Montrer que T définie par $\langle T, \psi \rangle := \partial^\alpha \psi(0)$ est homogène. De quel degré ?*
2. *Montrer que si P est un polynôme homogène de degré d, alors P définit une distribution homogène de degré d.*

4.6 Convergence des distributions, deuxième

Revenons sur la convergence des distributions maintenant que nous disposons d'un peu plus d'outils. Voici quelques propositions et exemples utiles en pratique :

Proposition 4.16. *Si T_n est une suite de distribution qui converge vers T dans L^1_{loc} alors $T_n \to T$ au sens des distributions.*

Exercice 3. Montrer que la suite de distributions définie par $\sin(nx)$ converge vers 0 au sens des distributions mais qu'en revanche, elle ne converge pas dans L^1_{loc}.

On a le résultat (très fort, preuve laissée de côté) de compacité suivant :

Proposition 4.17. *Soit T_n une suite de distribution telle que pour tout compact, il existe une constante C et un entier k tels que :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(K),\ |\langle T_n, \psi \rangle| \leq C_k \|\psi\|_{C^k},$$

alors on peut extraire de T_n une sous suite qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 4.18. *La fonction $(T, \psi) \mapsto \langle T, \psi \rangle$ est continue de $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.*