Université de Picardie Jules Verne | 20121-2013
UFR des Sciences | M1S1 Distributions.

Dérivations des distributions

1 Définition de la dérivation

Pour $f \in C^1(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}$. Alors, la formule d'intégration par partie donne :

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi(x)dx = -\int f(x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}dx.$$

On interprète alors cette formule en terme de crochet de dualité et on l'étend aux distributions :

Definition 1.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle dérivée par rapport à la variable x_i, que l'on note $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ la forme définie par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle := -\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle.$$

Proposition 1.2.
1. *$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution et si* $\mathrm{ordre}(T) < \infty$ *alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est d'ordre* $\leq \mathrm{ordre}(T) + 1$
2. $\mathrm{supp}(\frac{\partial T}{\partial x_i}) \subset \mathrm{supp}(T)$.
3. *Pour $f \in C^1$, alors la distribution $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ coincide avec la dérivée de la distribution f au sens des distributions.*
4. *La fonction $T \to \frac{\partial T}{\partial x_i}$ est continue au sens des distributions.*

Preuve. Pour le premier point, soit K un compact. On dispose alors d'une constante C_K et d'en entier k tels que, pour $\psi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|\langle T, \psi\rangle| \leq C_K\|\psi\|_{C^k}.$$

On applique alors à $-\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ (qui est encore à support dans K) puis on utilise le fait que $\|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\|_{C^k} \leq \|\psi\|_{C^{k+1}}$, il vient :

$$|\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle| = |-\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle| \leq C_K\|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\|_{C^k} \leq C_K\|\psi\|_{C^{k+1}}.$$

Cela prouve le premier point. Le deuxième point est évident. Le troisième point est clair par construction.

Pour le dernier point, soit ψ une forme test fixé et T_n une suite de distributions $T_n \to T$ au sens des distributions. Alors, par définition ($\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in \mathcal{D}$ est fixe) :

$$\lim_n\langle \frac{\partial T_n}{\partial x_i}, \psi\rangle = -\lim_n\langle T_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \psi\rangle.$$

Cela termine la preuve. □

Observons que l'ordre de la dérivée d'une distribution peut être celui de la distribution (par exemple pour une distribution C^1). La proposition précédente apparaît comme remarquablement simple à prouver. C'est parce qu'en fait tout a été fait pour que les distribution la vérifient.

Exercice 1. Calculer les dérivées de δ_0 au sens des distributions.

Exercice 2. Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $f \in C^\infty$, montrer que l'on a la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{i \leq \alpha} \binom{\alpha}{i} \partial^i f \partial^{\alpha - i} T$$

Proposition 1.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors*

1. *$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ est limite de quotients différentiels : au sens des distributions, dans tout ouvert $\Omega' \Subset \Omega$, on a*
$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_{te_k} T - T}{t}.$$
2. *pour tous indices i et j, on a :*
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$
3. *si $\Omega' \Subset \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ est tel que $|h| < d(\partial\Omega', \Omega)$, alors*
$$\tau_h T - T = \int_0^1 \left(\vec{\nabla}(T).h \right) dt.$$

2 Formule des sauts

Soit f une fonction C^1 par morceaux sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble (localement fini) des points de discontinuité de f. Pour x dans E, on pose $s_x := f(x^+) - f(x^-)$ la hauteur du saut. Soit enfin D^1 le lieu sur lequel f est C^1. On note $\{f'\}$ la dérivée de f sur D^1 (plus précisément la fonction L^1 qui coincide avec f' là où celle-ci est bien définie). On a alors la formule suivante, dite *formule des sauts* :

Proposition 2.1. *La dérivée de f au sens des distributions est donnée par :*

$$f' = \{f'\} + \sum_{x \in E} c_x \delta_x.$$

Preuve. Le résulat est local (par recollement). On peut donc supposer que la fonction f (ou f') admet un unique point de discontinuité x sur $I = [a, b]$. On considère ψ une fonction à support compact dans I et on écrit :

$$\langle f', \psi \rangle = \int_{[a,b]} -f(x)\psi'(x) = \int_{[a,x]} -f(x)\psi'(x) + \int_{[x,b]} -f(x)\psi'(x).$$

On intègre par partie $\int_{[a,x]} -f(x)\psi'(x) = [-f(x)\psi(x)]_a^x + \int_{[a,x]} f'(x)\psi(x) = -f(x-)\psi(x) + \int_{[a,x]} f'(x)\psi(x)$. On procède de même pour l'autre intégrale et on observe :

$$\langle f', \psi \rangle = \int_{[a,b]} \{f'(x)\}\psi(x) + (f(x^+) - f(x^-))\psi(x).$$

Autremenent dit $f' = \{f'\} + c_x \delta_x$. □

Exercice 3. Montrer que la fonction 1_{R^+} est une primitive du dirac en 0. En déduire que la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto |x|$ est δ_0.

Exercice 4. On veut montrer que $\ln|x|$ est une primitive de la valeur principale.

1. Pourquoi a-t-on que $\ln|x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$?
2. Soit $\ln_N|x| := \max(\ln|x|, N))$. Montrer que $\ln_N(|x|) \to \ln|x|$ dans $\mathcal{D}'$.
3. Calculer $(\ln_N|x|)'$ à l'aide de la formule des sauts.
4. Conclure.

3 Généralisation de la formule des sauts à la dimension supérieure.

On a la première généralisation :

Proposition 3.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on suppose que pour presque tout $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est C^1 et que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ainsi définie est dans L^1_{loc}. Alors $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$.*

Preuve. Par définition et par Fubini, pour une fonction test ψ, on a :

$$\begin{aligned}\langle \partial_1 f, \psi\rangle = -\langle f, \partial_1\psi\rangle &= -\int_\Omega f\partial_1\psi \\ &= \int_{\Omega_{x_1}} (\int_{x_1} -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1)dx_2\ldots dx_n,\end{aligned}$$

où Ω_{x_1} est l'intersection de Ω avec l'hyperplan $(y_1 = x_1)$. On intégre alors par partie et on conclut par Fubini. $\square$

Exercice 5. Soit $T = \ln r$, $r^2 = x^2 + y^2$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Calculer ΔT

Solution. $x \mapsto \ln|x|$ est dans L^1_{loc} car :

$$\int_{B(0,1)} |\ln r| d\lambda = \int_{[0,1]}\int_0^{2\pi} -(\ln r).rd\theta dr < \infty,$$

et en dehors de 0, T est lisse. En particulier, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. $T \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ donc pour presque tout x_2, $\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r^2}$ On a alors que :

$$\int_{B(0,1)} \frac{|x_1|}{r^2} d\lambda \le \int_{B(0,1)} \frac{1}{r} d\lambda \le \int_{[0,1]}\int_0^{2\pi} d\theta dr < \infty,$$

donc $\frac{\partial T}{\partial x_1} \in L^1_{loc}$. On peut donc appliquer le résultat précédent et on a $\partial_1 T = \frac{x_1}{r^2}$.

On ne peut pas réiterer le procédé car $\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = 1/r^2 + 2x_1^2/r^4$. Remarquons alors que $\Delta T = 0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Donc $\text{supp}(\Delta T) \subset \{0\}$ (on peut déjà en conclure que ΔT est une combinaison linéaire de δ_0 et de ses dérivées à l'ordre 1). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi(x, y) = \psi(r, \theta)$. Alors :

$$\langle \Delta T, \varphi\rangle = \langle T, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{2\pi} \ln r(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}]rdrd\theta.$$

L'intégrale du second terme en θ est nulle (périodicité). Donc :

$$\langle \Delta T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \ln r(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\int_0^{2\pi}\psi d\theta}{\partial r}))$$

on pourrait finir ainsi mais on reprendra ce calcul plus loin avec de meilleurs outils. $\square$

On veut maintenant un analogue à la formule des sauts en dimension supérieure.

Definition 3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que Ω est de classe C^k si $\partial\Omega$ peut-être recouvert par des ouverts U tels que sur chaque U, il existe $f \in C^k$ telle que :*

$$\Omega \cap U = \{x,\ f(x) > 0\},\ \partial\Omega \cap U = \{x,\ f(x) = 0\},$$

et $\vec{\nabla} f$ ne s'annule pas sur $\partial\Omega \cap U$

Soit f une fonction définie sur $\partial\Omega$, continue et à support compact.

Theorem 3.3 (Théorème de Stokes)**.** *Soit Ω un ouvert de classe C^1 et χ_Ω la fonction caractéristique de cet ouvert. Alors, il existe une unique mesure σ positive* $\mathrm{supp}(\sigma) \subset \partial\Omega$ *et $\partial_j \chi_\Omega = -N_j \sigma$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ où $N_j = \vec{N}.\vec{e_j}$ et $\vec{N}$ et la normale exterieur à $\partial\Omega$.*

Exemple 1. Soit $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$ (la fonction f qui définit le bord est alors x_n). On a alors :

$$\langle \partial_j \chi_\Omega, \psi \rangle = -\langle \chi_\Omega, \partial_j \psi \rangle = -\int_\Omega \partial_j \psi.$$

Supposons que $j \neq n$. En coordonnées et par Fubini :

$$\langle \partial_j \chi_\Omega, \psi \rangle = -\int_{x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_{j-1} \in \mathbb{R}, x_{j+1} \in \mathbb{R}, \ldots x_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n \geq 0}$$
$$(\int_{x_j \in \mathbb{R}} \partial_j \psi dx_j) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_{n-1} \ldots dx_n.$$

On intégre alors par partie l'intégrale en x_j et on trouve 0 ($\int_{\mathbb{R}} \psi'(x) = 0!$). maintenant, on prend $j = n$ et en coordonnées et par Fubini :

$$\langle \partial_n \chi_\Omega, \psi \rangle = -\int_{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}} (\int_{x_n = 0}^{\infty} \partial_n \psi dx_n) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

D'où :

$$\langle \partial_n \chi_\Omega, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

On a donc ici que σ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

Exemple 2. Soit $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ (on note alors (x, y) les coordonnées). On a alors, en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \langle \partial_x \chi_\Omega, \psi \rangle = -\langle \chi_\Omega, \partial_x \psi \rangle &= -\int_{B(0,R)} \partial_x \psi \\ &= \int_{0 \leq r \leq R} \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} -\partial_x \psi r dr d\theta. \end{aligned}$$

Soit $\varphi(r, \theta)$ la fonction C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ définie par $\varphi(r, \theta) = \psi(x, y)$. On utilise que

$$\partial_x \psi = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

On applique Fubini et on intègre par partie le terme $\int_{0\leq r\leq R}\cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial r}rdr$. On trouve

$$\begin{aligned}\int_{0\leq r\leq R}\cos(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial r}rdr &= [\cos(\theta)\varphi r]_0^R-\int_{0\leq r\leq R}\cos(\theta)\varphi dr\\ &=\varphi(R,\theta)R\cos(\theta)-\int_{0\leq r\leq R}\cos(\theta)\varphi dr.\end{aligned}$$

On applique Fubini et on intègre par partie le terme $\int_{0\leq\theta\leq 2\pi}\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta$:

$$\begin{aligned}\int_{0\leq\theta\leq 2\pi}\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta &= [\sin(\theta)\varphi]_0^{2\pi}-\int_{0\leq\theta\leq 2\pi}\cos(\theta)\varphi d\theta\\ &=-\int_{0\leq\theta\leq 2\pi}\cos(\theta)\varphi d\theta\end{aligned}$$

(le terme crochet est nul par périodicité). On somme et on reconnait :

$$\begin{aligned}\langle\partial_x\chi_\Omega,\psi\rangle &= \int_{0\leq\theta\leq 2\pi}-\psi(R,\theta)R\cos(\theta)d\theta\\ &=\int_{\partial B(0,R)}\psi(R,\theta)(-N_x)d\sigma\end{aligned}$$

où $N_x=\cos\theta=(1,0).(\cos\theta,\sin\theta)$ ($(\cos\theta,\sin\theta)$ est la normale extérieure) et $d\sigma=Rd\theta$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle de rayon R. On peut étendre ce résultat à la boule de dimension n.

On peut étendre les cas particuliers et montrer que la mesure σ du théorème de Stokes est la mesure de Lebesgue sur le bord du domaine. Néanmoins, pour prouver cela il faut faire un peu de calcul différentiel (et on n'a pas le temps) et en pratique, on considèrera essentiellement les cas où l'on a affaire à un demi-espace ou une boule.

Preuve du théorème de Stokes. On se place en U, un des ouverts recouvrant $\partial\Omega$. Soit f la fonction telle que

$$\Omega\cap U=\{x,\ f(x)>0\},\ \partial\Omega\cap U=\{x,\ f(x)=0\}.$$

On a alors que la normale extérieure en $x\in\partial\Omega$ est donnée par $-\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ et que donc $-N_j=\frac{\partial_j f}{\|\nabla f\|}$.

On considère une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, croissante et C^∞, $0\leq h\leq 1$ telle que

$$h(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\leq 0\\ 1 \text{ si } x\geq 1\end{cases}.$$

On considère alors $\chi_m(x)=h(mf(x))$, alors $\chi_n\in C^1$ et $\chi_m\to\chi_\Omega$ dans $L^1_{loc}(U)$ par convergence dominée. Par continuité de la dérivation, on a alors $\partial_j\chi_m\to\partial_j\chi_\Omega$ au sens des distributions. Or, $\partial_j\chi_m=mh'(mf(x))\partial_j f$. Si l'on choisit la coordonnée x_k telle que $\partial_k f\neq 0$ sur U (c'est possible quitte à restreindre U), on en déduit alors que $mh'(mf(x))\to\frac{\partial_k\chi_\Omega}{\partial_k f}$ au sens des distributions. Or $mh'(mf(x))$ est une distribution positive (i.e une mesure positive) donc on peut poser $\lim\nabla f mh'(mf(x))=\sigma$ où σ est une mesure positive. On reconnaît alors que :

$$\partial_j\chi_m\to\frac{\partial_j f}{\|\nabla f\|}\sigma,$$

ce qui est bien le résultat annoncé. On procède alors par recollement (observons que σ ne dépend pas de j ni de f). $\square$

Il existe alors plusieurs formules issues de la formule de Stokes, on aura tendance ici à les appeler toutes "formule de Stokes", dans la littérature on aura toutefois tendance à trouver une variété de noms quasi-infinie (fabriquée à partir de Gauss, Stokes, Bonnet, Green...).

Proposition 3.4. *Soit $\Omega \Subset \Omega'$ un ouvert de classe C^1. On considère la distribution T dans L^1_{loc} telle que :*
- *$T_{|\Omega}$ est donnée par $h \in C^1(\bar{\Omega})$*
- *$T_{|\Omega^c}$ est donnée par $g \in C^1(\bar{\Omega^c})$.*

Alors : $\partial_1 T = \chi_\Omega \partial_1 h + \chi_{\Omega^c} \partial_1 g + (g-h)N_1\sigma$

Preuve. La preuve consiste simplement à écrire $T = \chi_\Omega h + \chi_{\Omega^c} g$ et dériver le produit. □

Rappelons que ∂_N désigne la dérivée radiale. On a alors (c'est une conséquence directe de ce qui précède) :

Proposition 3.5. *Soit $(\vec{u}, \rho) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et Ω un ouvert borné. Alors :*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{u}\rho + \int_\Omega \vec{u}.\nabla\rho = \int_{\partial\Omega} \vec{u}.\vec{N}\rho d\sigma.$$

Dans le cas où $\rho = 1$, cela devient :

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{u} = \int_{\partial\Omega} \vec{u}.\vec{N} d\sigma.$$

Dans le cas où $\vec{u} = \nabla q$:

$$\int_\Omega \Delta q\rho + \int_\Omega \nabla q.\nabla(\rho) = \int_{\partial\Omega} \rho\partial_N q d\sigma,$$

d'où :

$$\int_\Omega \Delta q\rho - \Delta\rho q = \int_{\partial\Omega} \rho\partial_N q - q\partial_N\rho d\sigma$$

La dernière formule est connue sous le nom de *formule de Green.*