Université de Picardie Jules Verne 20121-2013
UFR des Sciences M1S1 Distributions.

Convolution

1 Définition de la convolution

1.1 Introduction

Comme pour les fonctions, on ne peut pas convoler n'importe quoi, il faut donc des hypothèses. La première est bien sûr que le domaine soit $\mathbb{R}^n$. On a le schéma suivant :

-soit f dans L^1_{loc} et $\psi \in \mathcal{D}$, on veut définir $f \star \psi \in \mathcal{D}'$. Bien sûr, la convolution existe déjà et est définie par $f \star \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(x-t)dt$. On considère une forme test φ, en terme de distribution, cela revient à dire :

$$\langle f \star \psi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(x-t)dt)\varphi(x)dx.$$

On peut appliquer Fubini et on observe :

$$\begin{aligned}\langle f \star \psi, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(t)\psi(x-t)\varphi(x)dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\varphi(y+t)dy)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle dt.\end{aligned}$$

Une observation cruciale est que $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle$ est encore à support compact. En effet, on a le lemme classique (admis, voir plus loin dans un cas plus général) :

Lemma 1.1. *Soit u et v deux fonctions de L^1 à support compact alors $u \star v$ est à support compact et* $\mathrm{supp}(u \star v) \subset \mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)$.

Ici on peut écrire $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle = \check{\psi} \star \varphi$ (on peut bien sûr voir cela directement). De plus, comme $\varphi \in \mathcal{D}$, les propriétes de la convolution garantissent que $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle$ est bien C^∞. En particulier, on a que $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle \in \mathcal{D}$ et on peut donc étendre la définition précédente à $T \in \mathcal{D}'$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \langle T \star \psi, \varphi \rangle := \langle T, \langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle \rangle$$

Observons qu'il n'y a pas besoin de mettre autant de régularité sur ψ : si $\psi \in L^1$ (toujours à support compact !), on a encore que $\langle \psi, \tau_{-t}\varphi \rangle \in \mathcal{D}$ et le calcul précédent a un sens. Notre objectif est d'assouplir encore ce résultat pour pouvoir :

- remplacer ψ par une distribution (avec des hypothèses).

-prouver que l'objet ainsi défini est bien une distribution et vérifier qu'il dépend continûment de T et ψ (dans un sens à préciser).

-vérifier que l'on conserve les propriétés essentielles de la convolution (symétrie, dérivation par rapport à ce qu'on veut ...).

On aura pour cela besoin du lemme suivant (son utilité est assez clair) :

Lemma 1.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $\psi \in \mathcal{D}$ alors la fonction $F : x \to \langle T, \tau_{-x}\psi \rangle$ est C^∞ et $\partial_j F$ est donnée par $x \to \langle T, \tau_{-x}\partial_j\psi \rangle$.*

Remark 1.3. La fonction F dépend continûment du couple (T, ψ).

On va montrer plutôt le résultat plus général :

Lemma 1.4. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On considère une fonction :*

$$\Psi : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}$$

de classe C^∞ telle que pour tout $y \in \Omega'$, $x \mapsto \Psi(x,y)$ est à support compact dans Ω (quitte à restreindre, on peut supposer que ce compact ne dépend pas de y). Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, la fonction :

$$F : y \to \langle T, \Psi(.,y)\rangle$$

est C^∞ et $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ est donnée par $y \to \langle T, \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}\rangle$.

Preuve. La continuité de F provient du fait que T est une distribution. On effectue un developpement de Taylor de $\Psi(x, y+h)$:

$$\Psi(x,y+h) = \Psi(x,y) + \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(x,y)h_i + \int_0^1 (1-t) \sum_{i,j} h_i h_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x, y+th)dt.$$

En particulier :

$$F(y+h) = F(y) + \sum_{i+0}^{m} \langle T, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(x,y)h_i\rangle + \sum_{i,j} h_i h_j \langle T, \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x,y+th)dt\rangle.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\langle T, \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x,y+th)dt\rangle,$$

est uniformément borné en h. Pour cela, on observe que $x \mapsto \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x,y+th)$ est à support compact dans K. Comme T est une distribution, on dispose d'une constante C et d'un entier k tels que $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_k$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Or, pour α tel que $|\alpha| \leq k$, on a :

$$\partial_x^\alpha \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x,y+th)dt = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^{|\alpha|}\partial^2 \Psi}{\partial x^\alpha \partial y_i \partial y_j}(x,y+th)dt$$

et donc :

$$\|\partial_x^\alpha \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(x,y+th)dt\|_\infty \leq \|\Psi\|_{C^{k+2}(K \times B(y,1))}$$

en prenant $|h| \leq 1$. Cela conclut la preuve. □

Lemma 1.5. *On considère une fonction $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors :*

$$int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \Psi(.,y)\rangle dy = \langle T, \int_y \Psi(.,y)dy\rangle.$$

Preuve. Supposons $n = 1$, de sorte que tout se passe dans le compact $K \times [-R, R]$. Soit $\xi \in \mathcal{D}([-R,R])$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \xi = 1$. Considérons la fonction :

$$\Phi(x,y) = \Psi(x,y) - \xi(y) - \int_{\mathbb{R}} \Psi(x,z)dz.$$

La fonction Φ à son support dans $K \times [-R,R]$ et $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,y)dy = 0$ pour tout $x \in \Omega$. En particulier,

$$\varphi(x,y) := \int_{-\infty}^{y} \Phi(x,z)dz$$

est dans $\mathcal{D}(K \times [-R,R])$. On vérifie que

$$\langle T, \varphi(x,y)\rangle = \int_{-\infty}^{y}$$

à finir...

1.2 Convolution entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}'$

On rappelle que $\mathcal{E}'$ désigne les distributions à support compact. D'après ce qui précède, on peut poser :

Definition 1.6. *Soient $T \in \mathcal{D}'$ et $S \in \mathcal{E}'$, on considère alors $T \star S$ la forme linéaire sur $\mathcal{D}$ définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \; \langle T \star S, \varphi \rangle = \langle S, F \rangle$$

où $F(x) = \langle T, \tau_{-x}\varphi \rangle$. Cette définition prolonge la définition classique dans le cas où $T \in L^1_{loc}$ et $S \in L^1$ a son support compact.

La définition précédente a un sens car $F \in C^\infty$ et $\mathcal{E}' = (C^\infty)'$. On a bien prolongé la définition classique. Reste à montrer que l'on a bien une distribution.

Proposition 1.7. *La forme $T \star S$ est dans $\mathcal{D}'$.*

Preuve. Il reste à montrer la continuité. Pour cela, soit φ_j une suite de $\mathcal{D}$ qui tend vers 0. Montrons que $\langle T \star S, \varphi_j \rangle \to 0$. Pour cela, on montre que $F_j := \langle T, \tau_{-x}\varphi_j \rangle$ tend vers 0 dans $C^\infty(K)$ où $\mathrm{supp}(S) \Subset K$. Or, F_j tend vers 0 uniformément sur K car pour $x \in K$, $\tau_{-x}\varphi_j$ a son support dans un compact fixé L et $\tau_{-x}\varphi_j$ tend vers 0 uniformément ainsi que toutes ses dérivées (donc $|\langle T, \tau_{-x}\varphi_j \rangle| \leq C_L \|\tau_{-x}\varphi_j\|_{C^k}$). De même pour les dérivées de F_j car $\partial^\alpha F_j = \langle T, \tau_{-x}\partial^\alpha \varphi_j \rangle$ par le lemme précédent. Le résultat suit. □

2 Propriétés

2.1 commutativité et résultats cruciaux

On aurait pu aussi définir $T \star S$ par $\langle T, F \rangle$ où $F(x) = \langle S, \tau_{-x}\varphi \rangle$. La preuve que $T \star S$ est dans $\mathcal{D}'$ est similaire, il faut seulement observer que $\mathrm{supp}(F) \subset \mathrm{supp}(S) + \mathrm{supp}(\varphi)$ pour obtenir la propriété du support captif. Cette observation est vérifiée facilement : soit $x \notin \mathrm{supp}(S) + \mathrm{supp}(\varphi)$, alors $\tau_{-x}\varphi$ a son support dans $\tau_{-x}(\mathrm{supp}(\varphi))$ et donc il ne rencontre pas celui de S.

Le vrai problème est de montrer que l'on a ainsi défini la même distribution (et dans le cas où S et T sont toutes deux à support compact, c'est une obligation pratique). Cela revient à montrer :

Proposition 2.1. *On a $S \star T = T \star S$.*

La preuve de ce résultat va passer par celles d'autres tout autant importants..

Proposition 2.2. *Soit ρ_ε une approximation de l'identité et $T \in \mathcal{D}'$, alors $T \star \rho_\varepsilon$ est C^∞ et tend vers T au sens des distributions. De plus si T est à support compact, $T \star \rho_\varepsilon$ aussi.*

Preuve. Observons que pour une fonction test φ on a :

$$\langle T \star \rho_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, F_\varepsilon \rangle$$

où $F_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\varphi(x+y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z-x)\varphi(z)dz$. On en déduit que $T \star \rho_\varepsilon$ se réalise comme l'application $z \to \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle$ qui est C^∞ par le lemme :

$$\begin{aligned}
\langle \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle, \varphi \rangle &= \int_z \langle T, \tau_z \rho_\varepsilon \rangle, \varphi(z) \\
&= \int \langle T, \varphi(z) \tau_z \rho_\varepsilon \rangle = \langle T, \int_z \varphi(z) \tau_z \rho_\varepsilon \rangle
\end{aligned}$$

L'interversion crochet de dualité intégrale se justifie ainsi : il est clair pour φ_E en escalier à support compact (linéarité de la distribution), on passe alors à la limite en vérifiant que $\int_z \varphi_E(z)\tau_z\rho_\varepsilon \to \int_z \varphi(z)\tau_z\rho_\varepsilon$ (c'est clair par les propriétés de continuité pour la convolution). □

On déduit de cela le corollaire (sans preuve) :

Proposition 2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$ au sens des distributions.*

On prouve maintenant :

Proposition 2.4. *On a $(T,S) \to T \star S$ est continue au sens des distributions (pour n'importe laquelle des deux définitions).*

Preuve. On le fait dans le cas de la première définition, la preuve est la même dans l'autre. Il suffit de montrer que si $T_j \to 0$, $S_j \to 0$ au sens des distributions alors $T_j \star S_j \to 0$ au sens des distributions. Pour cela, on a que pour $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle T_j \star S_j, \varphi\rangle = \langle T_j, F_j\rangle.$$

où $F_j(x) = \langle S_j, \tau_{-x}\varphi\rangle$. On utilise alors que $F_j \to 0$ dans $\mathcal{D}$ (ce n'est pas tout à fait évident, il faut se servir du principe de bornitude des distributions convergentes...) et la continuité du crochet de dualité (que l'on avait admise et qu découle elle aussi de principe de bornitude...). □

Preuve de la commutativité. Le résultat est maintenant clair : il est vrai pour T et S lisses et on conclut par continuité. □

3 Quelques propriétés

Proposition 3.1. *Soient (S,T,U) trois distributions, dont au moins deux sont compacts. Alors, $S \star (T \star U) = (S \star T) \star U$.*

Preuve. Clair si tout le monde est lisse, résultat par continuité. □

Exemple 1. Soit H, δ_0' et 1, on montre que

$$(H \star \delta_0') \star 1 = \delta_0 \star 1 = 1,$$

(on verra après que $S \star \delta_0' = S'$), observons que ces produits de convolution sont bien définis car une des distributions concernés est toujours à support compact. De même :

$$H \star (\delta_0' \star 1) = H \star 0 = 0,$$

mais $0 \neq 1$. On n'a bien sûr pas de contradiction car on a pas deux sur trois distributions à support compact. A quel moment la preuve du résultat précédent échoue-t-elle ?

Proposition 3.2. *Soit T une distribution, alors, $\delta_0 \star T = T$.*

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, qui est $\delta_a \star T$?

Proposition 3.3. *Soient (S,T) deux éléments de $\mathcal{E}'$, alors* $\operatorname{supp}(S \star T) \subset \operatorname{supp}(S) + \operatorname{supp}(T)$.

Proposition 3.4. $\partial_1(S \star T) = (\partial_1 S) \star T = S \star \partial_1 T$

Preuve. Une preuve assez astucieuse consiste à remarquer d'abord que $\partial_1 S = S \star \partial_1 \delta 0$ car :

$$\langle S \star \partial_1 \delta_0, \varphi \rangle = \langle S, \psi \rangle$$

où $\psi = \langle \partial_1 \delta 0, \tau_{-x} \varphi \rangle = -\varphi'(x)$. On a alors :

$$\partial_1(S) \star T = ((\partial_1 \delta_0) \star S) \star T = (\partial_1 \delta_0) \star S \star T = (\partial_1 \delta_0) \star (S \star T). \square$$

Sans démonstration , on donne ici le résultat général le plus optimal possible (en terme de support).

Definition 3.5 (fermés convolutifs.). *Soient $F_1, \ldots, F_k$ des fermés de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'ils sont convolutifs si pour tout $R > 0$, il existe $\rho(R) > 0$ tel que :*

$$\forall (x_1, \ldots x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k, \ |\sum x_i| \leq R \text{ alors } \forall i, \ |x_i| \leq \rho(R).$$

Dans le cadre où $T_1, \ldots, T_k$ sont des distributions à supports convolutifs, on peut définir leur produit de convolution (admis). Observons que ce cadre ne recouvre pas tous les cas où l'on peut définir le produit de convolution, par exemple, si f et g sont dans L^1, leur produit de convolution est bien défini mais pas par la théorie des distributions.

4 Applications (edp)

4.1 solution fondamentale

Definition 4.1. *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, on note*

$$P(\partial) = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha$$

l'opérateur différentiel associé. On appelle solution fondamentale E de $P(\partial)$ une distribution E telle que :

$$P(\partial)(E) = \delta_0.$$

Exemple 2.

$$\Delta(-\frac{1}{r}) = 4\pi\delta_0 \text{ sur } \mathbb{R}^3$$
$$\Delta(\ln r) = 2\pi\delta_0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

L'intérêt des solutions fondamentales est que si l'on en a une, on peut alors résoudre $P(\partial)(E) = S$ où S est dans $\mathcal{E}'$ en posant $u = S \star E$. A priori, on a alors une solution au sens des distributions (ce qui est le seul sens possible sans autres hypothèses) mais on peut montrer par exemple que si $S \in \mathcal{D}$ alors u est une solution au sens classique. Un résultat délicat donne que toute EDP linéaire (non identiquement nulle) admet une solution fondamentale. On peut à ce sujet introduire le résultat :

Theorem 4.2. *Toute solution faible d'une EDP ayant la régularité suffisante est une solution forte.*

4.2 Support singulier essentiel

Definition 4.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle* support singulier essentiel *de T, noté* $\mathrm{SSE}(T)$ *le complémenataire du plus grand ouvert sur lequel T est C^∞.*

On a immédiatement quelques propriétés : SSE $\subset$ supp, $\mathrm{SSE}(\partial_i T) \subset \mathrm{SSE}(T) \ldots$

Exemple 3.

$$\mathrm{SSE}(\delta_0) = \mathrm{SSE}(\delta_0') = \mathrm{SSE}(vp(1/x)) = \{0\}$$

Proposition 4.4. *Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\mathrm{SSE}(T \star S) \subset \mathrm{SSE}(T) + \mathrm{SSE}(S).$$

Preuve. Soit θ une fonction plateau pour $\mathrm{SSE}(S)$, on écrit alors

$$T \star S = T \star \theta S + T \star (1-\theta)S.$$

Le deuxième terme est lisse car on convole une fonction lisse avec une distribution (donc son SSE est vide). Pour le deuxième, on procède pareillement en considérant θ' une fonction plateau pour le support de T, on obtient :

$$T \star \theta S = \theta' T \star \theta S + (1-\theta')T \star \theta S.$$

Le deuxième terme est lisse pour les mêmes raisons, on a alors :

$$\mathrm{SSE}(T \star S) \subset \mathrm{supp}(\theta) + \mathrm{supp}(\theta').$$

On conclut alors car θ et θ' sont arbitraires. □

4.3 Opérateur hypoelliptique

Definition 4.5. *Un opérateur différentiel $P(\partial)$ est dit* hypoelliptique *si*

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ t.q } P(\partial)(u) \in C^\infty(\Omega),\ u \in C^\infty(\Omega).$$

Theorem 4.6. *Soit E une solution fondamentale de $P(\partial)$, on a l'équivalence :*
- *$P(\partial)$ est hypoelliptique*
- $\mathrm{SSE}(E) \subset \{0\}$

Preuve. Le premier sens est clair car si $P(\partial)$ est hypoelliptique alors sur $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ E vérifie $P(\partial)E$ lisse (car nul) donc E est lisse sur Ω.

Dans l'autre sens, soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $P(\partial)(u) \in C^\infty(\Omega)$. Soit θ une fonction plateau sur une petite boule B de Ω. On écrit alors :

$$\theta u = \delta_0 \star \theta u = P(\partial)(E) \star \theta u = E \star P(\partial)(\theta u).$$

On écrit alors $P(\partial)(\theta u) = \theta P(\partial)(u) + \sum_i Q_i(\partial)(\theta) Q_i'(\partial) u$ où la somme est finie, les Q_i des polynômes (non nuls) les Q_i' sont de pôlynômes. On peut donc écrire $P(\partial)(\theta u) = \theta P(\partial)(u) + V$ où V est nulle sur B. On a alors que

$$\theta u = E \star \theta P(\partial) u + E \star V$$

Le premier terme est lisse (car $\theta P(\partial) u$ l'est) le deuxième vérifie :

$$\mathrm{SSE}(E \star V) \subset \mathrm{SSE}(E) + \mathrm{SSE}(V) \subset \mathrm{SSE}(V),$$

en particulier, il est lisse sur B. □

Exemple 4.
- le laplacien est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^n$
- l'équation des ondes n'est pas hypoelliptique.

4.4 Primitives

Theorem 4.7. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors*

1. *Si pour tout i, $\partial_i T \in L^1_{loc}$, alors $T \in L^1_{loc}$*
2. *Si pour tout i, $\partial_i T \in C(\Omega)$ alors $T \in C(\Omega)$.*

Preuve. On montre le premier point d'abord. Le résultat est local. On montre donc le résultat pour θT où θ est une fonction plateau pour K compact(remarquons que l'on ne peut pas simplement supposer que T est à support compact car θT n'est plus nécessairement à dérivées L^1_{loc}). On a $\theta T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On observe :

$$\theta T = \delta_0 \star \theta T = (\Delta E) \star \theta T = \sum_{i=0}^{n} \partial_i E \star \partial_i \theta T$$

où E est la valeur fondamentale du laplacien. On a alors

$$\theta T \sum_{i=0}^{n} \partial_i E \star (\partial_i \theta) T + \sum_{i=0}^{n} \partial_i E \star (\partial_i T) \theta.$$

On observe alors que pour tout n (on est dans $\mathbb{R}^n$), $\partial_i E$ est lisse en dehors de 0. La propriété des supports essentiels donne que $\partial_i E \star (\partial_i \theta) T$ est lisse (donc L^1_{loc}) en dehors de K ($\partial_i \theta \equiv 0$ sur un voisinage de K). Quant au deuxième terme, on a que $\partial_i E \in L^1_{loc}$ et $(\partial_i T)\theta \in L^1$ par hypothèse, on en déduit que ce terme est dans L^1_{loc}. On a donc bien que $T \in L^1_{loc}$.

La preuve du deuxième point est similaire. □