Université de Picardie Jules Verne 20121-2013
UFR des Sciences M1S1 Distributions.

Transformée de Fourier

1 Définitions et motivations

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la transformée de Fourier de f notée $\hat{f}$, ou $\mathcal{F}(f)$, est la fonction de $C_0(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx$$

où $\langle x, \xi\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ (il existe d'autres normalisations, celle-ci n'est pas ma préférée mais elle simplifie l'écriture des formules de dérivations, par contre elle complique la formule d'inversion). On rappelle que si $|x|^k f(x) \in L^1$ alors $\hat{f}$ est C^k et l'on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f).$$

De même, si $f \in C^k$ est telle que ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont L^1 alors on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq k,\ \widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \hat{f}.$$

Enfin, on a la formule d'inversion de Fourier :

Proposition 1.1. *Si $\hat{f} \in L^1$, on a alors $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = (2\pi)^n \check{f}$ (où $\check{f} := x \mapsto f(-x)$).*

Preuve.

- Considérons la fonction $G(x) = e^{-x^2/2}$, on remarque que $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ et dans L^1 ainsi que toutes ses dérivées et que :

$$G'(x) = -xG(x).$$

On peut écrire $ix\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G'(x)) = \mathcal{F}(-xG) = (-i)\mathcal{F}(-ixG) = -i\mathcal{F}(G)'$. On remarque donc que $\hat{G}$ vérifie la même équation différentielle d'ordre 1 que G donc $\hat{(G)}(\xi) = \hat{(G)}(0)e^{-x^2/2}$. On calcule alors $\hat{(G)}(0) = \int e^{-x^2/2} dx$ par :

$$(\hat{(G)}(0))^2 = (\int e^{-x^2/2} dx)(\int e^{-y^2/2} dy) = \int e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\int} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi,$$

(on a utilisé Fubini et la formule de changement de variable en coordonnées polaires). On en déduit :

$$\hat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi} G(\xi). \tag{1}$$

- Par Fubini et une homothétie, on en déduit que $\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x|^2/2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}^n e^{-|\xi|^2/(2\varepsilon)}$ qui est une approximation de l'identité quand on la multiplie par $(2\pi)^{-n}$. On observe :

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int \hat{f} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} e^{ix\xi} d\xi$$

tend vers $\mathcal{F}(\mathcal{F}(u))(-x)$ par convergence dominée et par Fubini :

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-iy\xi} dy) e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \mathcal{F}(e^{-\varepsilon|x-y|^2/2}).$$

Le résultat suit. $\square$

Considérons alors l'EDP, $-\Delta f + f = u$ où $u \in L^1$. On considère une solution f (de classe C^2) dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont dans L^1. On prend la transformée de Fourier de l'EDP :

$$-\Delta \hat{f} + f = -\widehat{\sum_i} \partial_i^2 f + \hat{f} = (|x|^2 + 1)\hat{f} = \hat{u}.$$

On divise par $|x|^2 + 1$ et on reconnaît :

$$\hat{f} = \frac{\hat{u}}{(|x|^2 + 1)}.$$

Supposons donc en outre que $\frac{\hat{u}}{(|x|^2+1)} \in L^1$, on a alors la formule d'inversion de Fourier et on peut écrire :

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n} D_{-1}(\mathcal{F}(\frac{\hat{u}}{(|x|^2 + 1)})),$$

ce qui donne une formule intégrale explicite pour f. .

On souhaite généraliser cette idée au cas où le second membre est une distribution et sans ses hypothèses a priori d'intégration sur f. Il faut pour cela généraliser la notion de transformée de Fourier aux distributions. Soit $f \in L^1$, pour une fonction test φ, on écrit par Fubini :

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\varphi(\xi) d\xi \\ &= \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \end{aligned}$$

(le crochet de dualité est ici à comprendre dans $L^1 \times L^\infty$). Mais on ne peut pas étendre cette formule pour les distributions car si φ est à support compact, $\hat{\varphi}$ n'est jamais à support compact (sauf si $\varphi = 0$). On peut le voir facilement en observant que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}$ est analytique donc elle ne peut pas être localement nulle sinon elle l'est identiquement par unicité du prolongement analytique.

On va donc devoir restreindre la classe de distributions sur laquelle on peut définir $\mathcal{F}$ en augmentant l'espace des fonctions tests de telle sorte à trouver quelquechose stable par transformée de Fourier. Cet espace est *l'espace de Schwartz*, c'est l'un des apports majeures de Schwartz aux mathématiques.

2 Classe de Schwartz

Definition 2.1. *On appelle* Classe de Schwartz*, noté* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, l'ensemble suivant :*

$$\{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

On le munit de la famille de norme $\|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty$.

Autrement dit, une suite (ψ_j) de $\mathcal{S}$ converge vers ψ si pour tout α et β, $(x^\alpha \partial^\beta \psi_j)$ converge uniformément vers $x^\alpha \partial^\beta \psi$. On montre sans difficulté que ψ est automatiquement dans $\mathcal{S}$. On dira alors qu'une opération est continue pour $\mathcal{S}$ si l'image d'une suite convergente est convergente (ce qui est ici équivalent à la convergence pour la métrique associée à la famille de normes).

Exemple 1. – Il est clair que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.
– La fonction de Gauss $e^{-|x|^2/2}$ est dans $\mathcal{S}$

Proposition 2.2. *1. Pour tout multi-indice, la dérivation ∂^α est bien définie de $\mathcal{S}$ dans lui-même et est un opérateur linéaire continu.*

2. *Pour tout multi-indice, la multiplication par x^β est bien définie de $\mathcal{S}$ dans lui-même et est un opérateur linéaire continu.*

Proposition 2.3. *L'inclusion $\mathcal{D} \to \mathcal{S}$ est dense et continue.*

On en arrive maintenant à la raison même de la classe de Schwartz :

Theorem 2.4. *L'application linéaire $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est bien définie. Elle est continue et bijective et vérifie $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\psi)) = (2\pi)^n \check{\psi}$.*

Soit $\psi \in \mathcal{D}$, alors, on a le lemme suivant :

Lemma 2.5. *Pour tous α et β on a que $x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^1$ et si $\psi \to 0$ dans $\mathcal{S}$ alors, $\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans L^∞.*

Preuve du lemme. Comme $\psi \in \mathcal{S}$, $(|x|+1)^{n+2} x^\alpha \partial^\beta \psi$ est dans L^∞. On remarque alors que :

$$x^\alpha \partial^\beta \psi = ((|x|+1)^{n+2} x^\alpha \partial^\beta \psi) \frac{1}{(|x|+1)^{n+2}}.$$

Or $\frac{1}{(|x|+1)^{n+2}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et donc $x^\alpha \partial^\beta \psi \in L^1$ comme le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable. On peut alors calculer la transformée de Fourier de $x^\alpha \partial^\beta \psi$ et on observe que si $\psi \to 0$ dans $\mathcal{S}$ alors par définition $((|x|+1)^{n+2} x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans L^∞ donc $x^\alpha \partial^\beta \psi \to 0$ dans L^1 et par continuité de la transformée de Fourier (de $L^1 \to C_0$), $\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta \psi) \to 0$ dans L^∞. $\square$

Preuve du théorème. On peut alors utiliser les formules de dérivations pour la transformée de Fourier et on reconnaît :

$$\xi^\alpha \partial^\beta (\mathcal{F}(\psi)) = \xi^\alpha \mathcal{F}((-ix)^\beta \psi) = \mathcal{F}(-(i)^| \alpha | \partial^\alpha ((-ix)^\beta \psi)).$$

On applique alors la formule de Leibnitz à $\partial^\alpha((-ix)^\beta \psi)$ on reconnaît une somme de terme en $x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \psi$ la linéarité puis le lemme précédent implique alors que $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}$ est bien continue. Le reste du théorème suit. $\square$

Voici quelques propriétés additionnelles, les preuves sont laissées en exercice.

Proposition 2.6. *Si f et g sont dans L^1, on a $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$. En particulier, $\mathcal{S}$ est stable par convolution et pour ψ et φ dans $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}(\psi\varphi) = (2\pi)^n \check{\psi} \star \check{\varphi}$.*

Proposition 2.7 (Formule de Plancherel)**.** *Si f et g sont dans L^1, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g.$$

En particulier, pour $u \in \mathcal{S}$:

$$\|\hat{u}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \|u\|_{L^2}^2.$$

3 Distributions temperées

3.1 Définitions

On note alors $\mathcal{S}'$ le dual topologique de $\mathcal{S}$, autrement dit :

Definition 3.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'$, on dit que T est une distribution tempérée s'il existe une constante C et $k \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall \psi \in \mathcal{D},\ |\langle T, \psi \rangle| \leq C \sum_{\alpha,\ \beta,\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty.$$

On note $\mathcal{S}'$l'ensemble des distributions tempérées.

Par la densité des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$, on peut étendre $T \in \mathcal{S}'$ à $\mathcal{S}$ (encore heureux). On voit qu'alors on aurait pu définir $\mathcal{S}'$ de manière équivalente comme l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{S}$ telles que si $\psi_j \to 0$ dans $\mathcal{S}$ alors $\langle T, \psi_j \rangle \to 0$.

Definition 3.2. *On dit que $f \in L^1_{loc}$ est à croissance lente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$(1 + |x|)^{-m} f(x) \in L^\infty.$$

Proposition 3.3. *On a les inclusions :*
- *$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ où l'injection est continue.*
- *f à croissance lente est dans $\mathcal{S}'$*
- *$\forall p$, $L^p \subset \mathcal{S}'$ où l'injection est continue.*

Exercice 1.
- Montrer que $v.p(1/x) \in \mathcal{S}'$.
- Montrer que le peigne de Dirac est dans $\mathcal{S}'$.
- Donner un exemple de distribution non tempérée.

Definition 3.4. *On dit que (S_m) suite de $\mathcal{S}'$ tend vers S dans $\mathcal{S}'$ si :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}, \lim_{m \to \infty} \langle S_m, \psi \rangle = \langle S, \psi \rangle.$$

Il est équivalent d'avoir que $S_m \to S$ dans $\mathcal{D}'$ et S_m est équibornée dans $\mathcal{S}'$:

$$\exists (C, k), \forall m, \ \forall \psi \in \mathcal{D}, \ |\langle S_m, \psi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le k, \ |\beta| \le k} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty$$

Definition 3.5. *Pour $S \in \mathcal{S}'$, on définit la transformée de Fourier de S par :*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}, \ \langle \hat{S}, \psi \rangle := \langle S, \hat{\psi} \rangle.$$

La définition précède est bien définie car $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ (c'est fait exprès). On a la proposition :

Proposition 3.6. *L'application linéaire $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est continue.*

Preuve. Il faut montrer que si $S_n \to 0$ dans $\mathcal{S}'$ alors $\hat{S_n}$ aussi. Soit $\psi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\langle \widehat{S_n}, \psi \rangle = \langle S_n, \widehat{\psi} \rangle \to 0.\square$$

On donne la liste des propriétés classiques de la transformée de Fourier, les preuves sont évidentes par dualité.

Proposition 3.7. *Soit $S \in \mathcal{S}'$, alors :*
1. *pour tout couple de multi-indices : $(i\xi)^\alpha \partial^\beta \hat{S} = \mathcal{F}(\partial^\alpha((-ix)^\beta S))$.*
2. *$\widehat{\tau_a S} = e^{ia.\xi} \hat{S}$ et $\widehat{e^{ia.x} S} = \tau_a(\hat{S})$*
3. *$\mathcal{F}(\mathcal{F}(S)) = (2\pi)^n \check{S}$.*

3.2 Théorème de Paley-Wiener-Schwartz et convolution

Proposition 3.8. *Soit $S \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$, alors $S \star T \in \mathcal{S}'$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $S \star T$ est bien définie pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{S}$. Pour cela, on a :

$$\langle S \star T, \psi \rangle = \langle S, F$$

où $F(x) = \langle T, \tau_{-x} \psi \rangle$ est bien définie car $\tau_{-x} \psi$ est dans $\mathcal{S}$. On vérifie qu'on a alors une fonction C^∞ (c'est la même preuve que dans le chapitre précédent). Comme S est à support compact, on peut alors bien définir $\langle S, F \rangle$. $\square$

On est donc amené à accorder une importance particulière aux distributions à support compact. On a le théorème :

Theorem 3.9. *Si $S \in \mathcal{E}'$, alors $\hat{S}$ est C^∞ et est donnée par :*

$$\hat{S}(\xi) = \langle S, e^{-ix.\xi} \rangle.$$

Par ailleurs, $\hat{S}$ se prolonge à $\mathbb{C}^n$ en une fonction entière donnée par :

$$F(z) = \langle S, e^{-iz.\xi} \rangle$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \hat{S}, \psi \rangle = \langle S, \hat{\psi} \rangle = \langle S, \int \psi(x) e^{-ix\xi} dx \rangle.$$

Donc $\langle \hat{S}, \psi \rangle = \int_x \langle \hat{S}, e^{-ix\xi}\psi \rangle = \int_x \langle \hat{S}, e^{-ix\xi} \rangle \psi(x) dx$. Il suffit alors de prouver que $x \mapsto \langle S, e^{-ix\xi} \rangle$ est bien C^∞ (c'est le théorème de dérivation sous le signe distribution).

L'analyticité est assez facile si l'on utilise les équations de Cauchy Riemann. □

Le théorème de Paley-Wiener-Schwartz est une extension du résultat précédent qui donne des estimés de croissance de $\hat{S}$ ($|\hat{S}(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{A|\Im z|}$ et qui montre qu'à l'inverse toute fonction entière satisfaisant ces estimés est la transformée de Fourier d'une distributions à support compact).

Theorem 3.10. *Soient $S \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$, alors*

$$\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}(S).\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$$

.

Déjà, le terme de gauche a un sens car c'est la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}'$. Le terme de droite a aussi un sens car c'est le produit d'une distribution par une fonction C^∞. Le théorème impliquera alors que ce terme est dans $\mathcal{S}'$ (c'est une conséquence assez simple du théorème de Paley and co mais on va procéder directement). On a le lemme suivant :

Lemma 3.11. *Soient $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in C^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont à croissance lente, alors $fT \in \mathcal{S}'$.*

Preuve. En effet, si ψ_j est une suite de fonction tests qui tend vers 0 dans $\mathcal{S}$, alors :

$$\|x^\alpha \partial^\beta (f\psi_j)\|_\infty \leq \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'} \|x^{\alpha+m} \partial^{\beta'} \psi_j\|_\infty$$

qui tend bien vers 0. □

Preuve du théorème. Montrons que $\hat{S}$ ainsi que toutes ses dérivées sont à croissance lente.

$$\partial^\alpha \hat{S}(\xi) = \langle (-ix)^\alpha \hat{S}, e^{-ix\xi} \rangle$$

Soit m l'ordre de S, on a alors pour K' un compact dont l'intérieur contient le support de S :

$$|\langle \hat{S}, (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta (x^\alpha e^{-ix\xi})\|_\infty \leq C(1+|\xi|)^m.$$

On a alors que $\hat{S}\hat{T}$ est aussi dans $\mathcal{S}'$. On montre alors l'égalité par continuité. □

4 Exemples et applications

4.1 Calculs de transformée de Fourier

Exercice 2. Calculer la transformée de Fourier du Dirac, de la $v.p(1/x)$.

Solution. Pour δ, on écrit :

$$\langle \hat{\delta}, \psi \rangle = \langle \delta, \hat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-ix0} dx = \langle 1, \psi \rangle$$

donc $\hat{\delta} = 1$.

Pour $v.p(1/x)$, on utilise $xv.p(1/x) = 1$ donc $\mathcal{F}(xv.p(1/x)) = \hat{1} = 2\pi\delta$ par la formule d'inversion de Fourier. Or $\mathcal{F}(xv.p(1/x)) = i\partial_\xi \mathcal{F}(v.p(1/x))$. Donc $\partial_\xi \mathcal{F}(v.p(1/x)) = -2i\pi\delta$ donc $\mathcal{F}(v.p(1/x)) = -2i\pi H + C$. Maintenant $\mathcal{F}(v.p(1/x))$ est impaire car $vp(1/x)$ est impaire donc $C = 0$. $\square$

4.2 Symbole d'une EDP linéaire

Definition 4.1. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel linéaire, on note $P(\xi)$ son symbôle obtenue par transformée de Fourier, autrement dit :*

$$P(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha (i\xi)^\alpha,$$

où $P = \sum c_\alpha x^\alpha$.

Proposition 4.2. *On à l'equivalence :*
- $P(\partial)u = f$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- $P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La preuve est claire, tout suit du fait que la transformée de Fourier remplace la dérivation par un produit par un monôme et laisse $\mathcal{S}'$ stable.

Considérons alors l'EDP, $-\Delta u + u = f$ où $f \in \mathcal{S}'$ (que l'on cherche à résoudre dans $\mathcal{S}'$). Cette EDP a comme symbôle $1 + |\xi|^2$. On a alors que $\hat{u}(1 + |\xi|^2) = \hat{f}$ d'où :

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}$$

(on a raisonné jusqu'ici par équivalence). Il n'est pas dur de montrer que si$\hat{f} \in \mathcal{S}'$ alors $1 + |\xi|^2$ aussi donc cette équation admet bien une solution dans $\mathcal{S}'$. Poursuivons les calculs pour voir ce qui se passe. On reprend la transformée de Fourier :

$$(2\pi)^n \check{u} = \mathcal{F}\frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}.$$

Supposons qu'en plus $f \in \mathcal{S}$. En particulier, on peut appliquer la formule

$$\mathcal{F}(\frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2}) = (2\pi)^n \check{f} \star D_{-1}\mathcal{F}(\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}).$$

On reconnaît alors que :

$$u = f \star \mathcal{F}(\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}).$$

A l'inverse, on reconnaît que cette formule a un sens dès que f est à support compact. Sauf erreurs de calcul, on a alors montré que $\mathcal{F}(\frac{1}{1+\|\xi\|^2})$ est une solution fondamentale de $-\Delta u + u$.

5 Equation de la chaleur

5.1 Problème et calcul d'une solution

Soit $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une distribution de chaleur initiale. On étudie alors la variation de la température au cours du temps. Celle-ci est donnée par l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0 & \text{à } t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On recherche une solution. L'intuition physique veut qu'elle soit unique et plutôt régulière. On prend alors la transformée de (2) en x (t est donc fixé). Il vient :

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0. \tag{3}$$

On résoud explicitement (c'est facile) :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi).$$

Alors, en notant $E(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2})$ on a :

$$u(t,x) = E(t,.) \star u_0(x).$$

Un calcul donne par ailleurs $E(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. On a procédé jusqu'ici sans justification. Il faut maintenant vérifier que ce que l'on a écrit a un sens. On n'a pas encore les outils nécessaire pour énoncer l'unicité dans un cadre satisfaisant. Par contre on peut déjà vérifier l'existence. En proposant comme solution $u(t,x) = E(t,.) \star u_0(x)$.

Cette écriture a bien un sens car on convole deux fonctions de $\mathcal{S}$ (à t fixé non nul). Par transformée de Fourier en x on a alors dans $\mathcal{S}'$ que :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

pour tout $t \geq 0$. On vérifie alors sans peine que u est solution (en remontant les calculs précédents).