Espaces de Sobolev

1 Définition et motivation

1.1 Motivation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On cherche à résoudre l'équation $\Delta f = u$ sur Ω où $u \in \mathcal{D}$ est fixé et $f \in \mathcal{D}$. On considère $g \in L^2$, on multiplie par g et on intègre :

$$\int \Delta f g = \int gu.$$

Il est équivalent d'avoir f solution et $f \in \mathcal{D}$ vérifie $\int \Delta f g = \int gu$ pour tout g. Par Stokes (imaginons $g \in C^1$), on reconnaît alors :

$$-\int \nabla f . \nabla g = \int gu.$$

Mais le terme de droite définit une forme linéaire continue sur L^2 par Cauchy Schwarz. Le terme de gauche est a priori moins clair, il définit une forme linéaire continue sur les fonctions de L^2 à derivées dans L^2 ! Si l'on pouvait appliquer le théorème de Riesz, on pourrait alors représenter la forme linéaire continue $g \mapsto \int gu$ par un élément f mais pour le produit scalaire $\int \nabla f . \nabla g$. Le problème est évidemment que $\mathcal{D}$ n'est pas complet pour le produit scalaire considéré (pas plus que l'ensemble des g considérée).

C'est l'idée des espaces de Sobolev : regarder la complétion des espaces de fonctions de classe C^k pour les normes L^p

1.2 Definition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Definition 1.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$ On appelle espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble de distributions suivant :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

On le munit de la norme :

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$

Dans le cas particulier où $p = 2$. On note simplement cet espace H^k, la norme $\| * \|_{H^k}$ provient alors du produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g \rangle_{H^s} = \sum \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2}.$$

Il s'agit de bien comprendre la définition. Soit T une distribution, alors dire que $T \in L^p(\Omega)$ signifie qu'il existe une fonction $f \in L^p$ telle que $T = T_f$, dire que $\partial^\alpha f \in L^p$ signifie que la dérivée ∂^α de f prise au sens des distributions (objet toujours bien défini) est représentable par un élément de L^p. Prenons le cas particulier où $p = 2$, on a alors le lemme suivant (c'est le théorème de Riesz) :

Lemma 1.2. *Soit $u \in L^2$, alors $\partial_1 u \in L^2$ si et seulement si :*

$$\exists C,\ \forall \psi \in \mathcal{D},\ |\int_\Omega u\partial_1\psi dx| \leq C\|\psi\|_{L^2}.$$

Preuve. Dans le premier sens, on sait que :

$$\langle \partial_1 u, \psi\rangle = -\langle u, \partial_1\psi\rangle = \int -u(x)\partial_1\psi(x)dx.$$

Or par Cauchy Schwarz :

$$|\langle \partial_1 u, \psi\rangle| \leq \|\partial_1 u\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2},$$

ce qui donne le premier sens.

Dans l'autre sens, on a que $\psi \mapsto \langle \partial_1 u, \psi\rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$ munit de la norme L^2. On peut donc prolonger cette application par continuité à L^2 (car $\mathcal{D}$ est dense dans L^2). Mais par le théorème de Riesz, une application linéaire continue provient d'un produit scalaire : $\partial_1 u \in L^2$. □

Proposition 1.3. *L'espace $W^{s,p}$ muni de sa norme est un espace de Banach. De plus , l'espace H^k est un espace de Hilbert.*

On ne s'intéressera plus au cas où $p \neq 2$. On ne prouvera donc le résultat précédent que dans le cas H^k. On est par ailleurs particulièrement motivé par le cas où $k = 1$.

Preuve. C'est assez évident en fait (car on sait que L^2 est complet). Tout ce qu'il y a à montrer c'est que H^k est complet. Soit donc f_n une suite de Cauchy dans H^k. Alors, pour tout $|\alpha| \leq k$, $(\partial^\alpha f_n)_n$ est de Cauchy dans L^2, on sait donc qu'elle converge vers un élément f_α (on note f au lieu de f_0). Or convergence dans L^2 implique convergence au sens des distributions et continuité de la dérivation pour les distributions donne alors que $\partial^\alpha f = f_\alpha$ et on a bien la convergence de f_n vers f dans H^k. □

1.3 Densité et espace H_0^k

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ on a le résultat suivant :

Proposition 1.4. *Les fonctions de $\mathcal{D}$ sont denses dans H^k pour la norme de H^k.*

Preuve. On se contentera de cas où $k = 1$ (la preuve est la même dans le cas général mais cela allège les notations). Soit donc $f \in H^1$. Montrons d'abord que l'on peut approcher f par une fonction à support compact.

Pour cela, Soit χ_N une fonction plateau qui vaut 1 sur $B(0, N)$ et 0 hors de $B(0, N + 1)$. On peut choisir χ_N de telle sorte que $\|\chi_N\|_\infty + \|\nabla\chi_N\|_\infty \leq C$ où C ne dépend pas de N (faire un dessin pour s'en convaincre). Il est clair, par convergence dominée, que $\chi_N f := f_N$ tend vers f dans L^2.

On a par la formule de Leibniz que $\partial_1 f_N = \partial_1(\chi_N)f + \chi_N\partial_1 f$. Pour les mêmes raisons qu'avant, le terme $\chi_N\partial_1 f$ tend vers $\partial_1 f$ dans L^2. Il reste à montrer que $\partial_1(\chi_N)f \to 0$. Or :

$$|\partial_1(\chi_N)| \leq C1_{B(0,N+1)-B(0,N)}|f|.$$

Le résultat suit par ce que $1_{B(0,N+1)-B(0,N)}|f|$ tend vers 0 dans L^2 (en fait, on a même que $1_{B(0,N)^c}|f|$ tend vers 0 par convergence domninée).

On peut donc se ramener au cas où f est à support compact. On considère alors ξ_ε une approximation de l'identité dans $\mathcal{D}$. On pose alors $f_\varepsilon := f \star \xi_\varepsilon$. On a alors que $f_\varepsilon \to f$ dans L^2 par les propriétés de la convolution et comme $\partial_1 f_\varepsilon = (\partial_1 f) \star \xi_\varepsilon$ le résultat suit pour les dérivées de f de la même façon. □

La densité des fonctions C^∞ dans le cas général est un résultat bien plus difficile.

Definition 1.5. *On appelle* $H_0^k(\omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1}$. *C'est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert, c'est donc également un espace de Hilbert.*

Notons le corollaire de la preuve précédente qui permet de localiser certaines propriétés des éléménts des espaces de Sobolev :

Proposition 1.6. *Soit* $\Omega \subset \Omega'$ *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ *une fonction plateau pour un compact* $K \Subset \Omega$. *L'application* $u \mapsto u\theta$ *est une application linéaire continue de* $H^1(\Omega') \to H_0^1(\Omega)$.

2 Propriétés de H^k et H_0^k

2.1 Inégalité de Poincaré-Sobolev

Proposition 2.1. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *alors il existe une constante* $C = C(\Omega)$ *telle que :*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$$

On voit donc que la semi-norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ définit une norme sur Ω qui est équivalente à la norme de Sobolev. On la préférera en général pour sa simplicité d'écriture.

Preuve. Par densité, il suffit de montrer le résultat pour une fonction φ de $\mathcal{D}$. Pour $x \in \Omega$, on considère $\Omega_1^x := \Omega \cap \{(y, x_2, x_3, \ldots, x_n)\}$. Soit a un point du bord de Ω_1^x, on a alors $\varphi(a) = 0$ donc :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \partial_1\varphi dx_1.$$

D'où par Cauchy Schwarz, $|\varphi(x)|^2 \leq \mathrm{Diam}(\Omega)\int_{Rr}|\partial_1\varphi|^2 dx_1$. On intègre ensuite sur $x \in \Omega$. On obtient alors le résultat avec la constante $C = \mathrm{Diam}(\Omega)$.

Une autre preuve consiste à utiliser E, la valeur fondamentale du laplacien. On a alors que $\varphi = \Delta E \star \varphi = \sum_i \partial_i E \star \partial_i\varphi$. On utilise alors les propriétés de la convolution (remarquons que comme on prend la norme de φ sur Ω, on utilise seulement les valeurs de $\partial_i E$ sur $B(0, \mathrm{Diam}(\Omega))$), comme les $\partial_i E \in L^1(B(0, \mathrm{Diam}(\Omega)))$, on a :

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \sum \|\partial_i E\|_{L^1(B(0,\mathrm{Diam}(\Omega)))}\|p_i\varphi\|_{L^2},$$

ce qui termine la preuve. □

Exercice 1. *Donner un exemple (sur un ouvert non bornée) pour lequel l'inégalité de Poincaré n'est pas vraie. Donner des ouverts sur lequel on peut la généraliser.*

2.2 Théorèmes d'injection de Sobolev

D'abord, un énoncé évident mais dont les généralisations sont difficiles ou fausses :

Proposition 2.2. *Soit* $\Omega \subset \Omega'$, *alors on a on a alors les injections continues suivantes :*

1. *la restriction de* Ω' *dans* Ω *est bien définie de* $H^1(\Omega')$ *dans* $H^1(\omega)$ *(i.e. si* $f \in H^1(\Omega')$ *alors* $f_{|\Omega} \in H^1(\Omega)$*) et* $\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^1(\Omega')}$ *;*
2. *L'application* $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega')$ *donnée par l'extension triviale s'étend de* $H_0^1(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega')$ *(là encore, la norme est* 1*).*

On laisse les vérifications au lecteur et on le laisse méditer sur une généralisation du deuxième énoncé à $H^1(\Omega)$ (voir plus loin pour le principe de réflexion).

Theorem 2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p^* = \frac{2n}{n-2}$ si $n > 3$, on a alors les injections continues suivantes :*

1. *si $n > 2$ alors $H_0^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$;*
2. *si $n = 2$ alors $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$;*
3. *si $n = 1$, alors $H_0^1(\Omega) \subset C^{\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$, l'ensemble des fonctions höldérienne d'ordre $1/2$.*

Attention à bien comprendre ce théorème : dans le cas $n = 1$, $f \in H_0^1$ est a priori définie presque partout, et donc parler de continuité signifie que l'on peut choisir un représentant de f dans sa classe d'équivalence qui est continue.

Preuve. Comme $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$, on se ramène au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. On ne traitera que les cas $n = 1$ et $n = 3$.

Pour $n = 1$, on considère d'abord le cas où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, on observe (on applique Cauchy-Schwarz intensivement) :

$$\begin{cases} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_x^y |\varphi'(t)|dt \leq \sqrt{|x-y|}(\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|^2 dt)^{1/2} \\ |\varphi(x)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^x |\varphi'(t)\varphi(t)|dt \leq 2\|\varphi\|_{L^2}\|\varphi'\|_{L^2}. \end{cases}$$

Or, $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{1/2} = \|f\|_\infty + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{1/2}},$$

et on a montré que $\|\varphi\|_{1/2} \leq C\|\varphi\|_{H^1}$ (où C est explicitable facilement). Maintenant si $\varphi \in H^1$ est quelconque, on l'approche dans H^1 par une suite de fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Cette suite est alors de Cauchy, donc convergente dans $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Par unicité de la limite (au sens des distributions), on en déduit que $\varphi \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Cas où $n = 3$. On commence par le lemme :

Lemma 2.4. *Soit $f(x) = f_1(x_2, x_3)f_2(x_1, x_3)f_3(x_1, x_2)$ alors :*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \prod_j \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Preuve du lemme. On intègre d'abord en x_1 et on applique Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx_1 = |f_1(x_2, x_3)| \int |f_2(x_1, x_3)||f_3(x_1, x_2)|dx_1 \leq |f_1(x_2, x_3)|\|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}.$$

On intègre alors en x_2 et on applique Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|dx_1 dx_2 \leq \|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_1(., x_3)\|_{L^2_{x_2}}\|\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}\|_{L^2_{x_2}}.$$

Or :

$$\|\|f_3(., x_2)\|_{L^2_{x_1}}\|^2_{L^2_{x_2}} = \int_{\mathbb{R}}((\int_{\mathbb{R}} f_3(x_1, x_2)^2 dx_1)^{1/2})^2 dx_2 = \|f_3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|dx_1 dx_2 \leq \|f_2(., x_3)\|_{L^2_{x_1}}\|f_1(., x_3)\|_{L^2_{x_2}}\|f_3\|_{L^2_{\mathbb{R}^2}}.$$

On intègre alors en x_3 et un dernier Cauchy Schwarz donne le lemme (on utilise la même observation sur les normes). $\square$

On remarque alors pour $\varphi \in \mathcal{D}$ que :

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi(t_1, x_2, x_3)| dt_1.$$

On écrit la même inégalité pour les autres variables et on multiplie :

$$|\varphi(x)|^3 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_1 \varphi(t_1, x_2, x_3)||\partial_2 \varphi(x_1, t_2, x_3)||\partial_3 \varphi(x_1, x_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3.$$

On prend la racine carré de cette expression et on intègre en x_1, x_2 et x_3 :

$$\int |\varphi(x)|^{3/2} \leq \int_{\mathbb{R}^3} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi dt_1)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 \varphi dt_2)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_3 \varphi dt_3)^{1/2}$$

On applique le lemme (avec $f_1(x_2, x_3) = (\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 \varphi dt_1)^{1/2} ...)$:

$$\|\varphi(x)\|_{L^{3/2}}^{3/2} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^2} (\int_{\mathbb{R}} |\partial_j \varphi| dt_j)^{(1/2)\times 2} dx_{j+1} dx_{j+2})^{1/2}.$$

Soit :

$$\|\varphi(x)\|_{L^{3/2}}^{3/2} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_j \varphi|)^{1/2}.$$

On applique alors cette inégalité à φ^4 :

$$\|\varphi^6\|_{L^1} \leq \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |4\varphi^3 \partial_j \varphi|)^{1/2} = 8 \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^3 \partial_j \varphi|)^{1/2}.$$

On a par Cauchy-Schwarz :

$$\|\varphi^6\|_{L^1} \leq 8 \prod_{j=1..3} (\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^6|)^{1/4} (\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_j \varphi|^2)^{1/4}.$$

D'où :

$$\|\varphi^6\|_{L^1}^{1/4} \leq 8 \|\nabla \varphi\|_{L^2}^{3/2}.$$

On a alors $\|\varphi\|_{L^6} \leq 8^{2/3} \|\nabla \varphi\|_{L^2}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$ et on étend le résultat à H^1 par densité. Le résultat suit. $\square$

2.3 symétrie et trace

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$, le demi-espace ouvert. On dit que $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur de prolongment s'il est linéaire, continue et $P(u)_{|\Omega} = u(x)$ p.p. On a alors :

Proposition 2.5. *L'opérateur P définit par :*

$$Pu(x) = \Big\{ u(x) \text{ si } x_n > 0,\ u(x_1, x_2, \ldots, -x_n) \text{ si } x_n < 0$$

est un opérateur de prolongement.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on ne traite que le cas ∂_n. Par définition :

$$\langle \partial_n Pu, \varphi \rangle = \langle Pu, -\partial_n(\varphi) \rangle = \int_\Omega -u\partial_n(\varphi) + \int_\Omega -uP(\partial_n(\varphi)).$$

$$\langle \partial_n Pu, \varphi \rangle = -\int_\Omega u\partial_n(\varphi - P(\varphi)).$$

Soit $\chi_{n,\varepsilon} = \chi_{n,\varepsilon}(x_n)$, une suite de fonctions plateaux qui valent 1 sur un voisinage de $(-x_n = 0)$, nulle sur $\{|x_n| \geq \varepsilon\}$ et symétrique par rapport à $(x_n = 0)$. On a alors :

$$\langle \partial_n Pu, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega -u(1 - \chi_{n,\varepsilon})\partial_n(\varphi - P\varphi).$$

On utilise $\partial_j(\chi_{n,\varepsilon}\varphi) = \varphi\partial_j\chi_{n,\varepsilon} + \chi_{n,\varepsilon}\partial_j\varphi$ et on reconnait :

$$\langle \partial_n Pu, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega -u\partial_n((1 - \chi_{n,\varepsilon})(\varphi - P\varphi)) + \int_\Omega -u\partial_n((1 - \chi_{n,\varepsilon})(\varphi - P\varphi)).$$

On regroupe et le premier terme donne (cette fois, $\partial_n(\chi_{n,\varepsilon}\varphi)$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \partial_n u(1 - \chi_{n,\varepsilon})(\varphi - P(\varphi)) = \int_\Omega (\partial_n u)\varphi + \int_\Omega (-\partial_n u)\varphi$$

Quant au deuxième terme, il vaut 0 car on majore $\|\partial_n(\chi_{n,\varepsilon})\| \leq \frac{C}{\varepsilon}$, on fait un dl de $\varphi - P\varphi$ à l'ordre 1 (il s'écrit $= O(\varepsilon)$) et on intègre alors ... (je n'ai absolument pas le courage d'écrire les détails). □

Theorem 2.6. *L'application*

$$\begin{cases} C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega) \\ u(x) \mapsto u(x_1, x_2, \ldots, 0) \end{cases}$$

se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.