Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2012-2013
M1S1 Distributions.

Equation de Laplace

1 Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace

1.1 Formule variationnelle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in L^2(\Omega)$, on appelle solution u du problème de Dirichlet une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = f \tag{1}$$

au sens des distributions.

Theorem 1.1. *On a l'équivalence :*
- *u solution de (1) ;*
- *$u \in H_0^1$ vérifie $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on a $\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega fv$ (*formulation variationnelle *associée à (1)).*

Preuve. Soit u solution de (1) et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, on multiplie 1 par v et on intègre sur Ω :

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Par définition de la dérivation au sens des distributions :

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Or, comme $u \in H_0^1$, cela s'écrit $\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega fv$. Par densité, on peut étendre à H_0^1 cette égalité (le terme de gauche et le terme de droite sont des formes linéaires continues sur H_0^1).

Dans l'autre sens, si $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on a $\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega fv$, alors en particulier pour $v \in \mathcal{D}$, on reconnaît alors :

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle;$$

ce qui signifie que u est solution au sens des distributions. □

Theorem 1.2. *On a que (1) admet une unique solution.*

Preuve. On passe par la formulation variationnelle. On reconnaît alors que $v \mapsto \int fv$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ par l'inégalité de Poincaré-Sobolev. On en déduit qu'elle est représentable par un produit scalaire $v \mapsto \langle \nabla u, \nabla v\rangle$ où $u \in H_0^1(\omega)$ est unique. □

1.2 L'espace H^{-1}

Definition 1.3. *On appelle H^{-1} l'ensemble des distributions T qui vérifie :*

$$\exists C, \quad \forall v \in \mathcal{D}, \quad |\langle T, v\rangle| \leq C\|v\|_{H_0^1}.$$

L'espace H^{-1} est donc l'ensemble des distributions qui se prolongent en une forme linéaire continue sur H_0^1 :

$$H^{-1} = (H_0^1)'.$$

Exemple 1. En dimension 1, on a que $\delta_0 \in H^{-1}(\mathbb{R})$ car

$$|\langle \delta_0, \psi \rangle| = |\psi(0)| \leq \|\psi\|_\infty \leq C\|\psi\|_{H^1}.$$

C'est faux en dimension supérieure.

Il y a une subtilité ici : bien sûr, H_0^1 est un espace de Hilbert, il est donc son propre dual et toute forme linéaire continue sur H_0^1 peut se représenter par un produit scalaire (dans le cas borné pour simplifier) de la forme :

$$v \mapsto \int \nabla u . \nabla v.$$

Mais l'espace H^{-1} n'est pas le dual de H_0^1 pour le crochet du produit scalaire mais pour le crochet de dualité des distributions ! Par exemple, l'écriture $\int \delta_0' \nabla v$ n'a aucun sens. L'exemple précédent nous affirme cependant qu'il existe $u \in H^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \nabla u . \nabla v + \int uv = v(0).$$

On peut facilement expliciter un tel u car il s'agit de résoudre $-u'' + u = \delta_0$ au sens des distributions. On trouve alors $u = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$ (on peut le vérifier directement par la formule des sauts).

Theorem 1.4. *Soit $\nu \in H^{-1}(\Omega)$ alors l'équation $-\Delta u = \nu$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$*

La preuve est exactement la même que précédemment (on avait d'ailleurs utilisé dans le cas précédent que $v \mapsto \int fv$ était continue sur H_0^1 par l'inégalité de Poincaré, ce qui signifie en fait que $L^2 \subset H^{-1}$).

Notons enfin que ce théorème signifie que $-\Delta$ réalise un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ (pour le "continue" il y a un peu de travail).

1.3 Un peu d'optimisation

Soit $f \in L^2$ (ou $\nu \in H^{-1}$ mais avec L^2 on peut écrire des intégrales). Soit :

$$\begin{cases} J : & v \qquad \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv \\ & H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}. \end{cases}$$

Theorem 1.5. *Il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ qui réalise le minimum de J. Ce u est solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Poincaré, on a que :

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_L^2 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - C(\Omega)\|f\|_{L^2}\|\nabla v\|_L^2,$$

et donc J est minoré ($x^2 - \lambda x$ est borné). La fonctionnelle J admet donc un infimum m. Soit v_k une suite minimisante $J(v_k) \to m$. Alors, comme $2J(v_k) \leq \int_\Omega |\nabla v|^2$, on a que la suite $J(v_k)$ est bornée dans H_0^1. On peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers u (observons qu'alors (v_k) converge aussi faiblement dans L^2). Alors :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lim_k \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_k|^2$$
$$-\int_\Omega fu = -\lim_k \int_\Omega fv_k$$

et donc $J(u) \leq \lim_k J(v_k) = m$. Donc $J(u) = m$ et le minimum est atteint.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on écrit $J(u) \geq J(u + \varepsilon\varphi)$ et :

$$J(v + \varepsilon\varphi) = J(v) + \varepsilon(\int \nabla u \nabla \varphi - \int \varphi f) + o(\varepsilon).$$

On en déduit que $\int \nabla u \nabla \varphi - \int \varphi f \geq 0$ et en remplaçant φ par $-\varphi$ on a alors que $\int \nabla u \nabla \varphi - \int \varphi f = 0$. Autrement dit, $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'$ (l'unicité est alors obtenue par ce qui précède, on peut aussi utiliser la convexité de la fonctionnelle). □

1.4 Principe du maximum

Theorem 1.6. *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta u \geq 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \leq 0$ presque partout.*

Preuve.

2 Problème de Neuman pour l'équation de Laplace

2.1 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert de classe C^1, soit $f \in L^2$, on cherche à résoudre :

$$\forall v \in H^1, \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Proposition 2.1. *Le problème précédent admet une unique solution dans H^1.*

La preuve est la même que précedemment. La question est maintenant de savoir quelle est l'EDP que l'on a résolue. D'abord, en prenant pour φ une fonction test, on reconnaît que l'on a $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions. Il reste à comprendre la condition au bord. Soit $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}$, on multiplie $-\Delta u + u = f$ par φ et on intègre. On reconnaît alors :

$$\int_\Omega -u\Delta\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

On utilise la formule de Stokes et on reconnaît :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial}{\partial n} u)\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

On en déduit alors que $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} u\varphi = 0$ et donc que $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce que l'on vient de faire n'a pas vraiment de sens, il faut en fait comprendre $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$ au sens des des distributions. C'est la condition de Neuman.

2.2 Problème de Neuman incomplet

On prend Ω ouvert $\mathcal{C}^1$, borné et connexe.

Proposition 2.2. *Le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution dans $H^1(\Omega)$ ssi $\int_\Omega f dx = 0$. Cette solution est alors unique à une constante addiditve près.

Preuve. Par la formule de Stokes, on a que :

$$\int_\Omega -\Delta u.1 + \int_\Omega \nabla u.\nabla 1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

et donc $\int_\Omega f = 0$ est une condition nécessaire.

Il est clair que si l'on a une solution, elle est définie à une constante additive près. On utilise le théorème suivant (admis pour cause de temps) :

Theorem 2.3. *Soit Ω ouvert $\mathcal{C}^1$, borné et connexe, alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que :*

$$\int_\Omega |u|^2 \leq C(\Omega)(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left|\int_\Omega u\right|^2).$$

On introduit alors

$$\dot{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1, \int_\Omega u = 0\},$$

l'orthogonal de 1. On a que $u \mapsto \int_\Omega u$ est continue et donc $\dot{H}^1(\Omega)$ est un hyperplan fermé de H^1 (c'est donc également un espace de Hilbert). On conclut alors par le théorème de Riesz :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

est le problème variationelle associé et $\int_\Omega \nabla u.\nabla v$ est un produit scalaire équivalent au produit scalaire classique par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. $\square$