Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

20121-2013
M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 1.

Exercice 1. Donner les supports des fonctions suivantes :

$$\sin x, \xi(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \text{si } \|x\| > 0,\ \xi(x) = 0 \text{ sinon}$$

Exercice 2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{supp}(f) \subset \mathrm{supp}(f')$.

Exercice 3.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$\xi(x) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} \text{ si } \|x\| < 1,\ \xi(x) = 0 \text{ sinon}$$
est de classe C^∞.
2. Soit $\xi_1 := \xi / (\int \xi)$ de sorte que $\int xi_1 = 1$. Montrer l'existence d'une famille de fonction $(\xi_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ qui vérifie :
$$\xi_\varepsilon \in C^\infty,\ \xi_\varepsilon \geq 0,\ \int \xi_\varepsilon = 1,\ \mathrm{supp}(\xi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon).$$
Une telle suite est dite *approximation de l'identité*.
3. Soient $f \in C_0$ et $g \in L^1_{loc}$, on rappelle que le produit de convolution
$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$
est bien définie. Montrer que $f \star g \in C^0$ (donner un exemple où $f \star g \notin C_0$).
4. Soit $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\xi_\varepsilon \star g$ est une suite de C^∞ qui converge uniformément vers g sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
5. Soit $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\xi_\varepsilon \star g$ est une suite de C^∞ qui converge vers g dans L^1_{loc}.
6. Soit $K \subset U$ un compact inclus dans un ouvert. Montrer l'existence d'une fonction $0 \leq \chi \leq 1$, C^∞, à support dans U et valant 1 sur un voisinage de K. Pour cela, on pourra commencer par construire une telle χ seulement continue.
7. Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $\cup_{i\leq N} U_j$ un recouvrement ouvert de K. Montrer que :
   - $\exists \theta_1, \dots,\ \theta_N \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n),\ 0 \leq \theta_i \leq 1$
   - $\sum_i \theta_i(x) = 1$ sur un voisinage de K
   - $\mathrm{supp}(\theta_j) \subset U_j$.
8. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(x) = \sin(e^x)$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = e^{\sin x}$ pour $2 \leq x \leq 3$.
9. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive telle que F soit l'ensemble des points d'annulation de f.

Exercice 4 (Théorème de recouvrement de Vitali)**.** On veut montrer le théorème suivant : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. Soit $\mathcal{F}$ une collection de boules telle que pour tout $x \in E$ on a une boule de $\mathcal{F}$ centrée en x. Alors, il existe $B_1,\ B_2,\ \dots \in \mathcal{F}$ telles que :

1. $B_1,\ B_2,\ \dots$ sont disjointes ;
2. $E \subset \cup_i 3B_i$.

On propose pour cela le procédé suivant :

1. Soit $d_1 = \sup_{\mathcal{F}} \text{rayon}(B)$. Prouver le théorème si d est infini. On suppose maintenant d fini.
2. On prend B_1 une boule de rayon $> d_1/2$ et on pose de manière inductive :
$$d_k = \sup\{\text{rayon}(B),\ B \in \mathcal{F},\ B \cap (\cup_{i \leq k-1} B_i) = \varnothing\}.$$
Si $d_k = 0$ on arrête et on prend $\cup_{i \leq k-1} B_i$, sinon, on choisit pour B_k une boule de rayon $> d_k/2$ disjointe des $k-1$ précédentes..

Montrer que le procédé convient (on pourra montrer que pour $x \in E$ et $B \in \mathcal{F}$ centrée en x, B rencontre l'une des B_k).

Exercice 5. On veut prouver le théorème de Lebesgue :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$
En particulier, pour presque tout x :
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x).$$

1. Montrer que la première partie du théorème implique la deuxième. Quelle information donne ce théorème en terme de produit de convolution ?
2. on définit la fonction :
$$f^*(x) := \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy.$$
Montrer qu'il suffit de prouver $f^*(x) = 0$ p.p.
3. Montrer que $f^* \geq 0$ et $(f+g)^* \leq f^* + g^*$.
4. Montrer que si g est continue en x alors $g^*(x) = 0$.
5. En déduire $(f+g)^* = f^*$ si g est continue.
6. Montrer $f^* \leq Mf + |f|$ où Mf désigne la fonction maximale de f de l'exercice précédent.
7. Montrer que $\lambda(\{x,\ f^*(x) \geq t\} \leq \frac{2(3^n+1)\|f\|_1}{t}$ pour $0 < t < +\infty$ (on pour cela écrire $\{f^* > t\} \subset \{Mf > t/2\} \cup \{|f| > t/2\}$ et utiliser l'exercice précédent).
8. En prenant g continue telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$, montrer $\lambda(\{x,\ (f-g)^*(x) \geq t\} \leq \frac{2(3^n+1)\varepsilon}{t}$ et conclure.

Exercice 6. 1. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f(x)/x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Donner une CNS sur f pour que $f(x)/x^k \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 7. on se place sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que $f \mapsto f'$ est continue sur $\mathcal{D}$
2. Même question avec $f \mapsto P(f)$ avec P un polynôme.
3. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty$. Donner une CNS pour que $f \mapsto g \circ f$ soit continue.

Exercice 8. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe deux fonctions positives f_1 et f_2 de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $f = f_1 - f_2$. Même question en remplaçant $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par $\mathcal{D}$.

Exercice 9 (Théorème de Borel)**.** Soit $(a_n)_{n\geq 0})$ une suite de réels quelconque et χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et à support sur $[-2,2]$.

1. On pose $f_n = a_n \frac{x^n}{n} \chi(\frac{x}{\varepsilon_n}$. Montrer que pour tout n on peut choisir $\varepsilon_n > 0$ asse potit de sorte que
$$\forall k \leq n-1,\ \|f_n^{(k)}\|_{L^\infty} \leq 2^{-n}.$$
2. En considérant $f = \sum f_n$, montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$ (Théorème de Borel).

Exercice 10. Soit f une fonction C^∞ à support dans $[0,1]$. On veut montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}$ à $n+1$ zéros dans $]0,1[$. On note $Z(u)$ le nombre de zéros d'une telle fonction.

1. En écrivant $f(x) = xg(x)$, montrer que g est C^∞, puis que $Z(f^{(k+1)}) \geq Z(g^{(k)}) + 1$ pour tout entier naturel k.
2. En déduire que si $f(x) = x^p(1-x)^p g(x)$ on a $Z(f^{(k+2p)}) \geq Z(g^{(k)}) + 2p$ pour tous entiers naturels k, p.
3. Choisir p de façon que g vérifie $Z(g') \geq 2$. (on choisit p assez grand pour que g atteigne un maximum sur $]0,1/2[$ et un sur $]1/2,1[$). Conclure.

Exercice 11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact inclus dans Ω. On note $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
a) Soit $d(K,F) := \inf\{d(x,y),\ x \in K,\ y \in F\}$. Montrer que $d(K,F) > 0$ et que la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ $d(x,y) = d(K,F)$. On note $r = d(K,F)$.
b) Pour tout $r > \varepsilon > 0$, on pose $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n,\ d(x,K) \leq \varepsilon\}$. Montrer K_ε est un compact inclus dans Ω et un voisinage de K.
c) Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, à support dans $B(0,1)$ et telle que $\int \chi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\chi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\chi(x/\varepsilon)$ et on définit f_ε par
$$f_\varepsilon(x) := \int_{K_{2\varepsilon}} \chi_\varepsilon(x-y)dy$$
Montrer que $f_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie
$$\mathrm{Supp}(f_\varepsilon) \subset K_{3\varepsilon},\ 0 \leq f_\varepsilon \leq 1,\ f_\varepsilon|_{K_\varepsilon} = 1.$$
d) Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la famille de réels $\varepsilon^{|\alpha|} \sup |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)|$ reste bornée.
e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Peut-on espérer trouver des fonctions f_ε valant 1 au voisinage de K, à support dans $K_{2\varepsilon}$ et vérifiant l'estimation plus forte : $\sup_{|\alpha|=k} \varepsilon^{|\alpha|}\|\partial^\alpha f_\varepsilon\|_{L^\infty} \to 0$ (Penser à la formule de Taylor).