Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

20121-2013
M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 2. Exemples.

Exercice 1. On se propose de montrer que $v.p(1/x)$ n'est pas d'ordre 0. Pour cela, on pourra considérer une suite $\psi_n := 1/n\psi(nx)$ où $\psi \in \mathcal{D}$ à son support dans $]0,1[$.

Exercice 2. Pour $-2 < \alpha < -1$, montrer que quel que soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \psi(x)x^{\alpha}dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon}$$

où A dépend de ψ, mais pas de ε, et où R_{ε} tend vers une limite quand $\varepsilon \to 0$. On pose

$$pf(x^{\alpha}) := lim_{\varepsilon\to 0}R_{\varepsilon}$$

Montrer que $pf(x^{\alpha})$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

Montrer enfin que $pf(x^{\alpha})$ n'est pas d'ordre 0.

Exercice 3. Montrer que la formule

$$\langle T, \psi\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} \psi^{(i)}(i)$$

définit une distribution d'ordre infini sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que la formule

$$\langle T, \psi\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \psi^{(i)}(\frac{1}{i})$$

définit une distribution d'ordre fini sur $\mathbb{R}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de distribution sur $\mathbb{R}$ qui coincide avec T sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5. Soit (a_n) une suite quelconque à support non compact. Montrer que la formule

$$\langle T, \psi\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\psi^{(i)}(0)$$

ne définit pas une distribution $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le théorème de Borel).