Université de Picardie Jules Verne — 20121-2013

UFR des Sciences — M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 3.

Exercice 1. 1. Montrer que $xv.p(1/x) = 1$ au sens des distributions (sur $\mathbb{R}$).

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = 0$. Déterminer u.
3. Resoudre l'equation $xu = 1$.

Exercice 2. 1. Montrer que la masse de Dirac en 0 est homogène de degré -1. Montrer que sur $\mathbb{R}$, la distribution $v.p(1/x)$ est homogène de degré -1.

2. Déterminer les distributions homogènes de degré -1 sur $\mathbb{R}$ dont le support est $\{0\}$ (on admet qu'une distribution dont le support est $\{0\}$ est combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0).
3. Dans le cas où T est une distribution associée à une fonction de classe C^1 f, quelle propriété vérifie f lorsque T est homogène de degré p ?
4. Montrer que la dérivée d'une distribution homogène est encore homogène.
5. Montrer qu'une distribution est homogène de degré p si et seulement si
$$\sum_1^n x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = pT.$$
On pourra dériver la condition d'homégénéité pour $\lambda = 1$.
6. En déduire toutes les distributions homogènes sur $\mathbb{R}$ de degré 2.

Exercice 3. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $T' = 0$. Montrer qu'alors $T = Cste$.

Exercice 4. Montrer que la suite $(n^k \sin nx)$ tend vers 0 au sens des distributions.

Exercice 5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par
$$\langle T, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \psi(x, -x) dx$$

1. Montrer que T est bien définie et d'ordre 0.
2. Déterminer le support de T et en déduire que T n'est pas continue.
3. Calculer $\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}$.

Exercice 6. Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 qui vérifie :
- il existe $C > 0$ telle que $\forall n,\ \|f_n\|_{L^1} \leq C$
- $\forall n,\ \int_{\mathbb{R}^k} f_n = 1$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_{B_\varepsilon^c} |f_n| \to 0$.

Montrer que $f_n \to \delta_0$ au sens des distributions.