Université de Picardie Jules Verne — 20121-2013
UFR des Sciences — M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 4.

Exercice 1. Montrer que toutes les solutions au sens des distributions de $y'' + ay' + by = f$, avec f continue et a et b réels sont des solutions au sens classique. Calculer les solutions de $y' + y = \delta_0$ puis de $y'' + y = \delta_0$.

Résoudre $x^k \frac{d^m T}{dx^m} = 0$ au sens des distributions.

Exercice 2. Calculer les dérivées au sens des distributions de $vp(1/x)$ et de x_+^λ $(-1 < \lambda < 0)$.

Exercice 3. Montrer que δ_0 n'est pas la dérivée d'ordre n d'une fonction continue à support compact.

Exercice 4. Montrer que δ_0 n'est pas la dérivée d'ordre n d'une fonction continue à support compact.

Exercice 5. On considère dans le plan la distribution définie par la fonction localement intégrable :

$$E(x,t) = 1/2 \text{ si } t - |x| > 0, \ 0 \text{ si } t - |x| < 0.$$

On pose $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Calculer $\Box E$.

Exercice 6. Soit $r \geq 0$ défini par $r^2 = \sum x_i^2$. On pose alors

$$E_n = \ln r \text{ si } n = 2$$

et

$$E_n = r^{2-n} \text{ si } n > 2.$$

1. Montrer que $E_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2. Calculer ΔE_n.