Université de Picardie Jules Verne — 20121-2013
UFR des Sciences — M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 5.

Exercice 1. Montrer que l'on ne peut pas définir le produit de convolution de trois distributions quelconque au sens où ce produit n'est plus associatif.

Exercice 2. On pose $\mathcal{D}'_+ := \{T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(T) \subset [0, \infty[\}$

1. Montrer que pour S et T dans $\mathcal{D}'_+$ on peut encore définir $T \star S$ par :
$$\langle T \star S, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \tau_x \varphi \rangle \rangle$$
et que $S \star T \in \mathcal{D}'_+$. Quel est le neutre pour la convolution dans $\mathcal{D}'_+$?
2. Si $T \in \mathcal{D}'_+$, on notera T^{-1} l'unique distribution telle que $T \star T^{-1} = \delta$. Calculer H^{-1}, $(\delta')^{-1}$, $(\delta' - \lambda\delta)^{-1}$.
3. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Que représente la distribution $P(D)(\delta)^{-1}$?
4. Soit z_1, …, z_m les racines de P. Montrer que :
$$(P(D)\delta)^{-1} = He^{z_1 x} \star \cdots \star He^{z_m x}.$$
Qu'a-t-on montré ?

Exercice 3.

1. Trouver une solution fondamentale de l'opérateur $(\frac{d}{dx})^l$.
2. En déduire une solution fondamentale de $P = \partial_1^{l_1} \ldots \partial_n^{l_n}$
3. Supposons $l_1 = \cdots = l_n = k + 2$, montrer que P possède une solution fondamentale de classe C^k.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre k. Montrer qu'il existe $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ telle que
$$P(u) = f.$$
5. Soit $T \in \mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe des fonctions $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^n)$ telles que $T = \sum_\alpha \partial^\alpha u_\alpha$.

Exercice 4. On considère l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ défini par :
$$2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}.$$
On rappelle qu'une fonction est holomorphe si et seulement si elle est C^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. On considère l'ouvert $U_\varepsilon = D(0, R) - D_f(0, \varepsilon)$.

1. Vérifier que l'on a $\frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial \bar{z}} = 0$ sur U_ε.
2. En déduire pour f de classe C^1 :
$$\int_{U_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \int_{U_\varepsilon} \frac{\partial (f\frac{1}{z})}{\partial \bar{z}} = \int_{D(0,R)} \frac{f(z)}{z}(1/2, i/2).Nd\sigma - \int_{D(0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z}(1/2, i/2).Nd\sigma,$$
où $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle et N la normale extérieure.
3. En déduire :
$$\int_{U_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})/2d\theta - \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta})/2d\theta.$$
4. En supposant $f \in \mathcal{D}$, en déduire une valeur fondamentale de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
5. En supposant f holomrphe, en déduire la formule de Cauchy.