

Feuille d'exercices 6. Transformée de Fourier

Exercice 1. Pourquoi a-t-on que les polynômes sont dans \mathcal{S}' ? Dans \mathbb{R} , calculer la transformée de Fourier d'un polynôme P .

Exercice 2. Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée paire est paire.

Exercice 3. 1. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \star g = 0$ est identiquement nulle. Peut-on affirmer que f ou g est nulle? et si $f = g$?

2. Même question pour $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$.

Exercice 4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction d'Heaviside.

Exercice 5. Soit P non nul un polynôme sur \mathbb{R}^n . On note $P(\partial)$ l'opérateur différentiel associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'$ vérifie $P(\partial)(u) = 0$ dans \mathbb{R}^n alors $u = 0$.

Exercice 6. Soient $k > 0$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que $\frac{d^4 u}{dx^4} + ku \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $\frac{d^i u}{dx^i} \in L^2$ pour $0 \leq i \leq 4$.

Exercice 7. Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on pose $Du = \frac{1}{2i\pi} \frac{du}{dx}$. On considère l'opérateur : $P_h : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donné par :

$$P_h u = Du + \tau_h u.$$

Déterminer les h tels que P_h est injectif et donner le noyau de P_h dans les autres cas.