Université de Picardie Jules Verne — 20121-2013

UFR des Sciences — M1S1 Distributions.

Feuille d'exercices 7. Espace de Sobolev et transformée de Fourier

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence :
- $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq k|$, alors
$$\xi^\alpha \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Quel lien y-a-t'il entre $\langle f, g\rangle_{H^k}$ et $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k \hat{f}.\overline{\hat{g}}$ et entre $\|f\|^2_{H^k}$ et $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k|\hat{f}|^2$?

Exercice 2. On décide donc de généraliser la notion d'espace de Sobolev à $s \in \mathbb{R}$ par la formule :
$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}',\ (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}|^2 < \infty\}$$
que l'on munit du produit scalaire associé.

1. Qu'a-t-on montré à l'exercice précédent ?
2. Montrer que H^s est un espace de Hilbert.
3. Montrer que $H^s \subset H^t$ si $s \leq t$.
4. Montrer que H^{-s} est isomorphe au dual de H^s via l'application
$$\begin{cases} H^{-s} \to (H^s)' \\ f \mapsto L_f \end{cases}$$
où $L_f(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int \hat{\varphi}\overline{\hat{f}}$

Exercice 3. Montrer le théorème suivant : Soit $k \in \mathbb{N}$. Pout tout $s > N/2+k$, on a $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, tout $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ est égale presque partout à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^n)$, de plus il existe une constante $C_{n,k,s} > 0$ telle que pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ on a :
$$\max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{H^s}.$$
On commencera par montrer que pour tout $|\alpha| \leq k$, la fonction :
$$\xi \mapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \in L^2$$

Exercice 4. Montrer le théorème suivant : " Soient $n \geq 2$ et $s > 1/2$. Alors l'application linéaire :
$$\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$
définie par
$$\gamma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, 0)$$
se prolonge en une application linéaire continue
$$\gamma H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})."$$