Feuille d'exercices 8. Equation des ondes et équation de la chaleur

Exercice 1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \\ u(0,x) &= u_0 \\ u_t(0,x) &= u_1 \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont dans la classe de Schwarz.

1. Montrer que formellement $u = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}) \star u_1 + \mathcal{F}^{-1}(\cos(t|\xi|)) \star u_0$ où les transformées de Fourier et les produits de convolution sont en la variable x.
2. En déduire que si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, alors le problème admet une solution dans $C(\mathbb{R}, H^1) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$.
3. Montrer l'unicité d'une telle solution. Pour cela, montrer que l'énergie $\|u_t\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}$ est une fonction constante du temps.
4. On suppose que $n = 1$. Montrer que $\mathcal{F}(1_{[-1,1]}(x)) = \frac{2\sin\xi}{\xi}$. Montrer que $\mathcal{F}(\frac{\delta_{x=t}+\delta_{x=-t}}{2}) = \cos(t\xi)$.
5. En déduire que $u(t,x) = \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}(1_{[-t,t]} \star u_1)(x)$.
6. Soient $(u_0, 0)$ les données initiales. Montrer que :

$$\mathrm{SSE}(u(t,.)) \subset \mathrm{SSE}(u_0) + \{-t, t\}.$$

Exercice 2. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0 \end{cases}$$

où u_0 est dans la classe de Schwarz.

1. Montrer que formellement
$$u = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \star u_0$$
où le produit de convolution est en la variable x. On note $E(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$
2. En déduire que si $u_0 \in \mathcal{S}$, alors le problème admet une solution dans $C(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^n))$.
3. Montrer l'unicité d'une telle solution. Pour cela, montrer que l'énergie $\|u\|^2_{L^2}$ est une fonction décroissante du temps.
4. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a que $u(t,.)$ est dans L^∞ et
$$\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{n/2}} \|u_0\|_{L^1}$$
5. Montrer que l'on peut résoudre l'équation de la chaleur avec $u_0 \in L^2$ avec un unique $u \in C([0, +\infty[, L^2) \cap L^2_{loc}(H^1)$ et que
$$\forall t > 0,\ x \mapsto u(t,x) \in C^\infty$$
6. Montrer que si $0 \leq u_0 \leq M$ alors $0 \leq u \leq M$.