Dm 1. Distributions à support ponctuel.

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce devoir est de montrer le résultat (à connaître) suivant :

Lemma 0.1. *Si le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est réduit à un point (0 pour simplifier les notations), alors il existe un entier k et des scalaires $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ tels que :*

$$T = \sum_{\alpha,\ |\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

1. Montrer que $\sum_{\alpha,\ |\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ définit bien une distribution sur Ω de support $\{0\}$.
2. On prend désormais $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dont le support est réduit à $\{0\}$. Pourquoi T est-elle d'ordre fini ? Montrer que pour une distribution à support dans $\{0\}$, il existe une constante C et un entier k tels que pour toute fonction test ψ, on a :

   $$|\langle T, \psi\rangle| \leq C|\varepsilon|^{-k} \|\psi\|_{C^k(B(0,\varepsilon))}.$$

   (On reprend une preuve du cours où l'on écrira la formule de Leibniz avec ψh_ε où $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon)$ à son support dans $B(0,\varepsilon)$).
3. En déduire que si ψ a toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre k, alors $\langle T, \psi\rangle = 0$ (on pourra remarque que $\psi = o(\|x\|^k)$ en 0).
4. En déduire que $\langle T, \psi\rangle$ ne dépend que des valeurs des dérivées de ψ jusqu'à l'ordre k de ψ en 0.
5. Conclure.