

Master 1

Foncteurs à bi-ensembles simples et l'anneau double de Burnside

Soit G et H deux groupes finis. Un (G, H) -bi-ensemble est un ensemble avec action à gauche de G et à droite de H , actions qui commutent. Le module double de Burnside $B(G, H)$ est le module des classes d'isomorphisme de (G, G) -bi-ensembles avec addition donnée par réunion disjointe. On a une multiplication naturelle de $B(G, H) \times B(H, K)$ dans $B(G, K)$, en identifiant dans le produit direct l'action intérieure de H . Cette multiplication donne à $B(G, G)$ une structure d'anneau, appelée l'anneau double de Burnside. Pour tout anneau k , on construit $kB(G, H)$ (ou $kB(G, G)$) qui est le module (ou l'anneau) obtenu de $B(G, H)$ (ou $B(G, G)$) en étendant les scalaires de \mathbb{Z} à k .

La catégorie \mathcal{C} des bi-ensembles a comme objets les groupes finis et comme morphismes de G à H le module $B(H, G)$. La composition est donnée par la multiplication entre les bi-ensembles. De nouveau, pour un anneau k on construit $k\mathcal{C}$ qui est obtenue à partir de \mathcal{C} en étendant les scalaires à k , i.e. les morphismes de G à H sont donnés par le module $kB(H, G)$. La catégorie des foncteurs à bi-ensembles est la catégorie des foncteurs de $k\mathcal{C}$ dans $k\text{-Mod}$.

Dans ce travail on va essayer de faire une parallèle entre les modules simples sur $kB(G, G)$ et les foncteurs simples à bi-ensembles. Il se trouve que les $kB(G, G)$ -modules simples apparaissent comme des évaluations à G des foncteurs à bi-ensembles simples. La difficulté est de décider quand est-ce que ces évaluations sont nulles. Pour des exemples de petits groupes on essaiera de comprendre la structure du $kB(G, G)$ -module $kB(G, H)$ à l'aide du foncteur à bi-ensembles $kB(-, H)$.

Bibliographie

- Bouc, S., *Biset functors for finite groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics no. 1990 (2010)
- Bouc, S., Stancu, R. et J. Thévenaz, Simple biset functors and double Burnside ring, *Journal of Pure and Applied Algebra* **217** (2013), no. 3, 546–566.
- Bouc, S., Stancu, R. et J. Thévenaz, Vanishing evaluations of simple functors, preprint 2012, *Journal of Pure and Applied Algebra* **218** (2014), no. 2, 218–227.