THÉORIE DU PLURIPOTENTIEL ET APPLICATIONS À LA DYNAMIQUE COMPLEXE

par

Thomas Gauthier et Gabriel Vigny

---

1. Introduction

Une des idées majeures de la théorie du pluripotentiel est de voir les ensembles analytiques (objets fondamentaux en géométrie et dynamique complexes) comme des courants positifs fermés T. De tels objets sont des formes différentielles à coefficients mesures. On peut alors, pour T, définir la notion de potentiel (au moins localement), c'est-à-dire de formes différentielles à coefficients L^1 dont le laplacien complexe, ou dd^c, vérifie $dd^cU = T$. Les ensembles analytiques sont des objets extrêmement rigides, les courants, eux, admettent plus de souplesse et peuvent être régularisés, approximés, notamment en régularisant U.

Cette théorie est notamment un prolongement naturel au champ complexe (fonctions pluri-sous-harmoniques) des outils fondamentaux du domaine des équations aux dérivées partielles elliptiques (principe du maximum, analyse fonctionnelle . . .)

En dynamique complexe, la théorie du pluripotentiel est devenue un outil incontournable dans l'étude ergodique d'une application rationnelle ainsi que dans la description des phénomènes d'instabilités dans les espaces de paramètres.

Le but de ce mémoire est d'établir les principaux résultats de la théorie du pluripotentiel, notamment la théorie des fonctions pluri-sousharmoniques puis d'appliquer cette théorie dans l'étude des bifurcations d'une famille de fonctions holomorphes pour localiser les lieux de fortes instabilités. Il sera intéressant de valider numériquement une partie de ces résultats (calcul approché de la masse locale de certaines mesures).

2. Théorie du pluripotentiel

La référence est le livre de Demailly [**D**]. L'étudiant doit introduire les objets suivants:

– formes différentielles (d'abord sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, puis sur les variétés et enfin sur les variétés complexes), définitions, produit extérieur, différentielle, d^c.
– définition par dualité des courants notamment les courants positifs fermés. Exemple du courant d'intégration sur un ensemble analytique, théorème de Lelong, Skoda... Images directe et réciproque d'un courant, intersection avec une forme lisse.
– Fonctions plurisousharmoniques (psh), définitions et propriétés classiques (principe du maximum, composition par des fonctions convexes croissantes...). Laplacien complexe dd^c, calcul de $dd^c \log |h|$ pour h holomorphe.
– Intersection de courants: $dd^c u \wedge T$ quand u est psh bornée ou quand les singularités de u sont compactes et théorèmes de continuités respectifs. Définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe, des nombres de Lelong, formule de Poincaré-Lelong (interprétation en tant que solution fondamentale de l'opérateur de Monge-Ampère complexe).

3. Application à la dynamique complexe

La référence est le livre de Dinh-Sibony [**DS**] (ainsi que [**BB**]). L'étudiant doit introduire les objets suivants:

- Fonction de Green d'une application holomorphe de $\mathbb{P}^k$, premières propriétés : psh, Hölder, bornée.
- Mesure de Green. Utilisation des propriétés des fonctions psh pour obtenir des résultats dynamiques (dimension de la mesure de Green, taille d'ensemble de Julia par exemple). Définition de la somme des exposant de Lyapunov.
- Définition du courant de bifurcation sur une famille analytique (dans $\mathbb{P}^k$), formule de Manning-Przytycki. Dans le cas où $k = 1$, définition de la mesure de bifurcation μ_{bif}. Vérification que cette mesure est non nulle dans le cas des polynômes de degrés d (masse non nulle par Bézout) ainsi que pour les fractions rationnelles de degré d par l'existence des applications de Lattès.
- Finalement, si l'étudiant a suffisamment avancé, on montrera que les applications de type Misiurewicz sont dans le support de μ_{bif} par Astorg and co [**AGMV**] dans la famille des fractions rationnelles de degré d.

4. prérequis

Nous recherchons un étudiant avec des bases solides en analyse fonctionnelle et analyse des EDP, simulations numériques, avec une appétence pour un domaine nouveau la dynamique holomorphe, appréhendée par le biais de la théorie du pluripotentiel.

Références

[AGMV] M. Astorg, T. Gauthier, N. Mihalache, and G. Vigny. Collet, Eckmann and the bifurcation measure. *ArXiv e-prints*, May 2017.

[BB] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on $\mathbb{P}^k$. *J. Reine Angew. Math.*, 608:201–235, 2007.

[D] J.-P. Demailly. Complex analytic and differential geometry, 2011. free accessible book (http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf).

[DS] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In *Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 2010.

Thomas Gauthier et Gabriel Vigny