Connexité de l'espace des actions lisses de $\mathbb{Z}^2$ sur le segment $[0, 1]$

Hélène Eynard-Bontemps

La question qui nous intéressera dans cet exposé est très simple à énoncer : étant donné un couple de difféomorphismes lisses de $[0, 1]$ qui commutent (et préservent l'orientation), peut-on le relier au couple trivial (identité, identité) via un chemin continu de tels couples ? Je commencerai par expliquer que cette question, qui peut sembler très "étroite" voire anecdotique, joue en fait un rôle clef dans l'étude de l'ensemble des feuilletages de codimension 1 existant sur une variété de dimension 3 donnée quelconque, via la notion d'holonomie (je ne supposerai aucune connaissance préalable sur ces sujets). Si l'on relâche l'une des contraintes (commutativité ou régularité), la question initiale devient beaucoup plus simple. Mais mises ensemble, ces contraintes créent une grande rigidité, que nous tournerons à notre avantage pour prouver la connexité de l'espace des couples de difféomorphismes considérés. La connexité par arcs, en revanche, demeure une question ouverte, pour des raisons qui deviendront apparentes au fil de la preuve.

Travail en collaboration avec C. Bonatti