Sur les densités asymptotiques d'ensembles définis par la fonction somme des chiffres

Élise Janvresse
Elise.Janvresse@u-picardie.fr

Le sujet de ce mémoire vise à à mieux comprendre les propriétés asymptotiques de la mesure de probabilité associée aux densités asymptotiques d'ensembles définis par la fonction somme des chiffres en base entière. Cette question est bien sûr liée aux problèmes de propagation de retenues, à la théorie des nombres, ainsi qu'aux systèmes dynamiques.

Plus précisément, si on se donne un entier a, on s'intéresse aux ensembles des entiers n tels que la différence entre la somme des chiffres en base b de n et de $n+a$ est un entier fixé d. Pour tout entier $n = \sum_{k\geq 0} n_k b^k$, notons $s_b(n) = \sum_{k\geq 0} n_k$ la somme de ses chiffres. On s'intéresse alors aux ensembles

$$E_{a,d} = \{n \in \mathbb{N} | s_b(n+a) - s_b(n) = d\}, \quad \forall d \in \mathbb{Z}.$$

Parmi les travaux fondateurs sur la fonction somme des chiffres, on peut citer Bésineau [1] qui a prouvé que de tels ensembles admettaient bien des densités asymptotiques. Si on appelle $\mu_a(d)$ la densité de $E_{a,d}$, μ_a est une mesure de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Par exemple, dans le cas où $b = 2$, on a $\mu_0 = \delta_0$ et $\mu_1(d) = 2^{1-d}$ pour tout $d \leq 1$.

Toujours dans le cas où $b = 2$, Emme et Prikhodko [3] étudient la variance de la mesure de probabilité μ_a. Il est montré dans [2] qu'après renormalisation, la mesure μ_a converge faiblement vers la loi normale centrée réduite (théorème central limite) lorsque a tend vers l'infini en un sens particulier. Pour cela, les auteurs étudient les moments de μ_a, et montrent qu'ils convergent bien vers les moments de la loi normale centrée réduite.

Le but de ce mémoire est de savoir si ces propriétés sont toujours vérifiées pour une base différente de 2. Après avoir lu l'article de Bésineau, la deuxième étape sera donc de généraliser l'étude de la variance de μ_a pour $b \neq 2$, afin de trouver la bonne normalisation à effectuer si l'on souhaite montrer un théorème central limite.

L'étudiant.e pourra également réfléchir à une démonstration du résultat suivant (montré dans [4] par une méthode d'algèbre linéaire) : Pour a s'écrivant $a_\ell \dots a_0$ en base b, notons a^R l'entier s'écrivant $a_0 \dots a_\ell$ en base b (obtenu en renversant les chiffres de a). Alors $\mu_a = \mu_{a^R}$.

Références

[1] Jean Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres"*, Acta Arith. **20** (1972), 401–416.

[2] Jordan Emme and Pascal Hubert, *Normal distribution of correlation measures of binary sum-of-digits functions*, arXiv :1810.11234, 2018.

[3] Jordan Emme and Alexander Prikhod'ko, *On the asymptotic behavior of density of sets defined by sum-of-digits function in base 2*, Integers **17** (2017), Paper No. A58, 28.

[4] Johannes F. Morgenbesser and Lukas Spiegelhofer, *A reverse order property of correlation measures of the sum-of-digits function*, Integers **12** (2012), Paper No. A47, 5.