Résolution numérique d'une EDP avec dérivée non entière

Hervé VJ. Le Meur[a]

[a] *LAMFA Univ de Picardie Amiens*
Herve.Le.Meur@u-picardie.fr

10 décembre 2018

Objectifs : Ce mémoire comporte deux objectifs successifs. Dans un premier temps il s'agira de comprendre comment un article traite numériquement une dérivée non entière (1/2 en fait) au bord du domaine ainsi que de comprendre d'où vient ce terme. Dans un deuxième temps (qu'on pourra sauter selon l'intérêt de l'étudiant), il s'agira de mettre en oeuvre numériquement la résolution de l'EDP en domaine borné avec ces conditions aux bords et de vérifier l'efficacité de ces conditions artificielles. Dans un troisième temps, on essaiera de programmer la résolution d'une EDP comportant, en plus, le même terme de dérivée d'ordre 1/2 mais cette fois en chaque point, voire de faire la théorie associée.

Mots clés : Fourier, dérivée non entière, équation d'évolution.

1 Introduction

On sait ce qu'est une fonction, ainsi que sa dérivée. Mais comment pourrait-on dériver à moitié, voire d'un nombre irrationnel ?

Depuis une dizaine d'années, différents modélisateurs voient apparaître des dérivées non entières à partir de leurs modèles très classiques. Que voudrait dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C\dfrac{\mathrm{d}^\alpha u}{\mathrm{d}t^\alpha} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ u(t=0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

pour un α entre zéro et un ?

On voit apparaître de telles équations, par exemple, quand on cherche à trouver l'évolution des ondes de surface en partant des équations de Navier-Stokes. Il a alors été prouvé qu'il fallait utiliser des équations d'évolutions contenant une dérivée non entière. On en trouve des exemples dans [3], [5] ou [4].

2 Plan du travail

2.1 L'état de la bibliographie

On travaillera successivement sur [2] pour introduire le sujet (en français), puis sur [1]. Dans ce deuxième article on verra que les auteurs se sont intéressés à un problème *a priori* annexe : quelles conditions aux bords d'un domaine (forcément) borné (numériquement) si l'équation d'évolution est pensée dans un domaine non borné ? On verra qu'une dérivée d'ordre 1/2 en temps intervient au bord du domaine de calcul.

Le but est en fait que la solution dans le domaine tronqué et avec des conditions aux limites artificielles au bord (tout aussi artificiel) ne diffère pas de la solution dans le domaine infini. Cela garanti à la solution numérique d'être meilleure que si on imposait des conditions de Dirichlet ou Neuman choisie au hasard. On verra que les conditions sont certes artificielles, mais résultent de pas mal de travail théorique.

2.2 Résolution numérique de KdV avec condition artificielle

Ici, nous suivrons le même article [1] pour faire la programmation de la résolution de

$$u_t + 6u\, u_x + u_{xxx} = 0,\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Nous résoudrons en fait cette équation dans un domaine borné $[a, b]$ et vérifierons numériquement les conditions numériques proposées par les auteurs en les comparant avec des conditions "naturelles" (Dirichlet par exemple).

Le traitement numérique nécessitera de bien prendre en compte une dérivée d'ordre 1/2 au bord.

2.3 Résolution numérique de KdV *visqueux*

Le but ici est de résoudre numériquement

$$2u_\tau + 3au\, u_\xi + u_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{\sqrt{\pi R \sqrt{b}}} \int_{\xi'=0}^{\tau/\varepsilon} \frac{u_\xi(\xi + \xi', \tau)}{\sqrt{\xi'}}\, \mathrm{d}\xi' = 0,\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Le terme en plus de (3) par rapport à (2) est justement cette dérivée d'ordre 1/2.

Selon le temps disponible, on pourra soit essayer de résoudre cette EDP dans un domaine numérique borné, sans se poser de question sur d'intelligentes conditions artificielles au bord (numérique), soit chercher quelles seraient les conditions absorbantes (théorique), soit les deux !

Fait à Amiens le 10 décembre 2018

References

[1] C. Besse, M. Ehrhardt, I. Lacroix-Violet. Discrete artificial boundary conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 2016.

[2] F. Dubois, A.-C. Galucio et N. Point Introduction à la dérivation fractionnaire, *Techniques de l'ingénieur Applications des mathématiques* 2010/04/10

[3] H.V.J. Le Meur, Derivation of a viscous Boussinesq system for surface water waves, *Asymp. Anal.* 94 (2015) pp. 309–345

[4] P.L.-F. Liu and A. Orfila, Viscous effects on transient long-wave propagation, *J. Fluid Mech.* **520** (2004) pp. 83–92.

[5] D. Dutykh, Visco-potential free-surface flows and long wave modelling, *Eur. J. Mech. B Fluids* **28** (2009) 3 pp. 430–443.

[6] Marco Donatelli, M. Mazza, S Serra-Capizzano, Spectral analysis and structure preserving preconditioners for fractional diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 307 (2016), pp. 262–279