Le nombre de rotation pour des potentiels quasi-périodiques

On s'intresse dans ce mémoire au spectre de l'opérateur de Schrödinger quasi-périodique $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ où q est une fonction sur $\mathbb{R}$ quasi-périodique dans le sens de Bohr. On étudiera alors l'article [1] où une approche consiste à associer à toute fonction propre φ, *i.e.* satisfaisant $L\varphi = \lambda\varphi$ pour un certain scalaire λ, un nombre de rotation $\rho(\lambda)$ défini comme la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \arg(\varphi'(x) + i\varphi(x))$.

Les auteurs montrent la fonction $\lambda \mapsto \rho(\lambda)$ est monotone et constante sur n'importe quelle composante connexe du complémentaire du spectre de L et prend ses valeurs dans

$$\{\lambda_j \in \mathbb{R}; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x q(x) e^{-i\lambda_j x} dx \neq 0\}.$$

De plus ils obtiennent que si $\nu(a, b, \lambda)$ est le nombre de valeurs propre λ' de L avec $\lambda' \in [a, b]$ et $\lambda' \leq \lambda$, on a

$$\frac{\nu(a, b, \lambda)}{b - a} \to \frac{\rho(\lambda)}{\pi} \quad \text{lorsque} \quad b - a \to \infty.$$

Le but de ce mémoire est de comprendre cet article et d'étudier des extensions possibles à d'autres fonctions q quasi-périodiques. Contact:

Samuel Petite : `samuel.petite@u-picardie.fr`.

[1] Johnson, R.; Moser, J. The rotation number for almost periodic potentials. *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), no. 3, 403–438.
[2] Johnson, R.; Moser, J. Erratum: "The rotation number for almost periodic potentials". *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), no. 2, 317–318.