**UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE**
**Mastère 1 de Mathématiques 2019-2020**

## Proposition de sujet de mémoire

*Jean-Paul Chehab, bur. C015*
`Jean-Paul.chehab@u-picardie.fr`

### Polynômes orthogonaux et applications

Soit $]a, b[$ un intervalle borné[1] et $w$ une fonction de $L^1(]a, b[)$ à valeurs positives. On dit que $(p_k)_{k\geq 0}$ forme une famille de polynômes orthogonaux (à coefficients réels) par rapport au produit scalaire $< ., . >_w$ défini par $< u, v >_w = \int_a^b uvwdx$ si

- $< p_i, p_j >_w = 0$ si $i \neq j,\ i, j \in \mathbb{N}$,
- $p_k$ est de degré $k, \forall k \geq 0$.

Les polynômes orthogonaux apparaissent naturellement dans les problèmes d'approximation en moyenne quadratique. Ils jouissent de par la seule propriété d'orthogonalité de très belles propriétés génériques, citons par exemple la relation de récurrence à 3 termes, la totalités des racines sont rélles et simples, toutes contenues dans $]a, b[$. Ils se révèlent un outil performant en approximation polynômiale et permettent de construire des formules de quadrature très précises (quadrature de Gauss). Ils sont également utilisés pour approcher les solutions d'équations différentielles ordinaires comme celles d'équations aux dérivées partielles.

Ce mémoire se veut être une introduction aux techniques d'approximation à l'aide de polynômes orthogonaux. On partira de quelques résultats généraux d'approximation polynomiale, on abordera ensuite les propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux. Les polynômes de Tchebytcheff et ceux de Legendre seront considérés pour les applications. Des illustrations numériques simples à l'aide de Scilab ou Matlab pourront être réalisées.

Il n'y a pas de prérequis spécifiques.

# References

[1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques pour le Calcul Scientifique*, Springer 2000.

[2] M. Schatzman, *Analyse Numerique. Une approche mathématique*, Dunod, Paris, 2002.

[1]pour simplifier. On peut très bien travailler sur $]0, \infty[$ ou sur $] - \infty, +\infty[$ pour construire les polynômes de Laguerre ou de Hermite.