"L'algèbre des périodes"
Sujet de mémoire pour le Master 1 de mathématiques

David Chataur
david.chataur@u-picardie.fr

2021-2022

Mise en perspective

Une **période effective** est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire s'expriment comme le résultat du calcul d'une intégrale de la forme

$$\int_{P(x_1,\ldots,x_n)\geq 0} \frac{Q_1(x_1,\ldots,x_n)}{Q_2(x_1,\ldots,x_n)} dx_1 \ldots dx_n$$

où $P(x_1,\ldots,x_n), Q_1(x_1,\ldots,x_n), Q_2(x_1,\ldots,x_n)$ sont des polynômes en les variables $x_1,\ldots,x_n$ et à coefficients rationnels. Parmi ces nombres on peut citer :

$$log(a) = \int_1^a \frac{dx}{x}, \text{ pour } a \in \mathbb{Q}_+^*,$$

$$\pi = \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2} = \int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy,$$

$$\zeta(3) = \int_{0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq 1} \frac{dx_1}{1-x_1}\frac{dx_2}{x_2}\frac{dx_3}{x_3}.$$

Une période effective possède plusieurs représentations intégrales comme c'est le cas pour le nombre π. En fait de nombreuses quantités ayant une origine géométrique s'expriment comme des périodes effectives : longueurs, aires, volumes.....
Les périodes effectives forment un sous-ensemble $\mathtt{Per}^{eff}$ des nombres complexes, cet ensemble est une $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre. Ici $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques. Il s'agit d'un enesmble dénombrable.

Les domaines sur lesquels sont calculées ces intégrales sont ce que l'on appelle des **variétés algébriques**. Les variétés algébriques constituent les objets de base de la **géométrie algébrique**.

L'étude de ces nombres a une longue histoire qui remonte au moins à Newton. Un point important est de comprendre les relations entre périodes effectives, typiquement la formule

$$log(ab) = log(a) + log(b),$$

d'ailleurs on peut donner une démonstration intégrale de cette identité. Il existe bien d'autres formules liant ces nombres complexes, comme les formules d'addition pour la lemniscate de Bernoulli. On songe aussi aux travaux menés au XVIII-ième et XIX-ième siècles par Euler, Abel et Jacobi sur les intégrales elliptiques et sur ce que l'on appelle aujourd'hui les intégrales abéliennes.
On peut même dire qu'il s'agit d'une thématique centrale de la géométrie algébrique dont l'étude a initiée de nombreux développements dans ce domaine. On peut citer les travaux de Riemann dans lesquels il montre pourquoi il est éclairant de calculer des intégrales sur des surfaces plutôt que sur $\mathbb{C}$. Cette approche géométrique explique complètement les relations découvertes par Euler, Abel et Jacobi sur les intégrales abéliennes. Et c'est une tendance naturelle du sujet que de transformer les identités entre périodes effectives en des relations géométriques.

Au tournant du XXI-ième siècle, M. Kontsevich et D. Zagier ont posé une conjecture ambitieuse : **la conjecture des périodes**. Cette conjecture prédit que les relations polynômiales entre périodes effectives proviennent de trois règles élémentaires du calcul intégral :
- additivité de l'intégrale,
- changement de variables,
- théorème de Stokes (qui est une généralisation de la formule de Leibniz-Newton).
Une reformulation de cette conjecture est que l'on peut passer de deux représentations intégrales du même nombre via ces trois règles de base. Pour citer l'exposé au séminaire Bourbaki d'Y. André :

"Une réponse très leibnizienne à la question serait alors le philosophème : ≪ les propriétés formelles de $\int$ constituent la raison suffisante des relations polynomiales entre périodes ≫"

Objectifs du mémoire

A priori, il s'agit d'un sujet qui touche à la théorie des nombres. Cependant, on peut reformuler la conjecture des périodes en des termes purement géométriques.

Ce que l'on propose dans ce mémoire :
(1) comprendre l'algèbre des périodes effectives, il faudra ici revoir quelques techniques de base du calcul intégral,
(2) construire l'algèbre des périodes abstraites, qui sont en fait "les vraies

périodes", c'est-à-dire les intégrales vues comme des objets formels, c'est ici que la géométrie fait son apparition,
(3) comprendre l'énoncé de la conjecture des périodes qui prédit un isomorphisme entre périodes effectives et périodes abstraites.

Pourquoi choisir ce mémoire :
(1) Il permettra de comprendre en quoi des problèmes "concrets" en théorie des nombres se reformulent géométriquement voire en termes de topologie des variétés algébriques.
(2) On pourra se familiariser avec certains concepts : variétés algébriques, formes différentielles, homologie, qui sont centraux en algèbre, géométrie et topologie. C'est intéressant pour qui souhaiterait tenter un M2 recherche en algèbre, géométrie et topologie (cf le parcours ATNA).

Prérequis :
(a) maitriser les bases du calcul différentiel et intégral, avec un zeste de géométrie différentielle et un peu d'analyse complexe,
(b) les bases de l'algèbre commutative (anneaux et polynômes), la théorie de Galois,

Références

On pourra se baser sur l'excellent texte "Une introduction aux périodes" de Javier Fresán, disponible ici :
`http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/xups.pdf`
ces notes sont issues des journées X-UPS 2019, les cours ont été filmés et sont disponibles ici :
`https://indico.math.cnrs.fr/event/3933/page/315-videos-des-annees-precedentes`