Mémoire de M1

Dynamique topologique et Théorème de van der Waerden

dirigé par Fabien Durand

1. But du mémoire.

L'objet de ce mémoire est de comprendre l'une des preuves du résultat qui suit et via ce travail acquérir quelques bases en dynamique topologique.

Théorème de van der Waerden. *Soit* $N_1, \cdots, N_l$ *une partition de* $\mathbb{N}$. *Il existe* $i \in \{1, \cdots, l\}$ *tel que* N_i *contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Ce résultat fut prouvé en 1927 par B. L. van der Waerden et fut qualifié en 1948 par A. I. Khintchine de l'une des "three pearls of number theory".
En 1978 H. Furstenberg et B. Weiss ont obtenu le Théorème de van der Waerden en corollaire du résultat topologique suivant :

Théorème de Furstenberg-Weiss. *Soient* (X, d) *un espace métrique compact,* T *un homéomorphisme de* X *et* $c_1, \cdots, c_l$ *des entiers. Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$d(T^{nc_i}x, x) < \epsilon, \ \forall i \in \{1, \cdots, l\}.$$

Il faudra étudier et comprendre l'une des preuves de ce résultat, puis expliquer les raisons pour lesquelles le Théorème de van der Waerden en est une conséquence. Suivant l'avancement, des extensions de ce résultat pourront être étudiées.

2. Documents de travail.

Le travail aura pour base le livre *Ergodic Theory* de K. Petersen.

3. Prérequis.

L'unique prérequis est une bonne maîtrise de la topologie métrique. K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge University Press.