Entopie diabolique

Nicolae Mihalache

C'est bien connu que l'entropie de la famille quadratique réelle est continue (Misiurewicz-Szlenk), monotone (Milnor-Thurston, Douady-Hubbard-Sulivan) et localement constante sur un ouvert dense de paramètres hyperboliques (Graczyk-Swiatek, Lyubich). L'ensemble de paramètres non-hyperboliques est de mesure positive (Jakobson, Benedicks-Carleson). Guckenheimer a montré que l'entropie est uniformément Hölder continue.

Nous (Dobbs-Mihalache) trouvons la valeur de l'exposant de Hölder de l'entropie h en presque tout paramètre a. On a

$$\mathrm{Höl}(h,a) = h(a)/\mathrm{Lyap}(a),$$

où $\mathrm{Lyap}(a)$ est l'exposant de Lyapunov de l'orbite critique, qui est bien défini d'après Avila-Moreira. En utilisant des résultats récents (Dobbs-Todd) sur la dépendance au paramètre des mesures invariantes, nous montrons que pour presque tout paramètre a, $h'(a) = 0$.

En dehors d'un voisinage arbitraire de -2 (pointe de l'ensemble de Mandelbrot), presque tout paramètre est envoyé par h dans un ensemble de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1. En dehors d'un voisinage arbitraire de $\log 2 = h(-2)$, presque toute valeur de l'entropie provient d'un ensemble de paramètres de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1.