PROPRIÉTÉ DE NORTHCOTT SUR LES CORPS DE NOMBRES

GABRIEL VIGNY

Pour un nombre $p/q \in \mathbb{Q}$ écrit de manière irréductible, on peut définir sa *hauteur* par $h(p/q) := \max \log |p|, \log |q|$. Cette quantité peut être étendue à des points $x \in K$ où K est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$ de la manière suivante: Si $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ est un polynôme minimal dans $\mathbb{Z}[X]$ qui annule x, on pose alors $h(x) = \max_i \log |a_i|$. La hauteur est alors une mesure de la complexité arithmétique de x.

On peut étendre cette notion aux points de $\overline{\mathbb{Q}}^d$ pour $d \in \mathbb{N}^*$ et même aux points de $\mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{Q}})$, l'espace projective des points à coordonnées algébriques (cette construction consistera en une part du mémoire).

La deuxième partie du mémoire sera de prouver la *propriété de Northcott* qui peut s'énoncer ainsi : Soit $M \geq 0$, il existe une constante finie $C([K : \mathbb{Q}], d, M)$ qui dépend seulement du degré $[K : \mathbb{Q}]$ de l'extension, de d et de M telle que

$$\#\{x \in \mathbb{P}^d(K),\ h(x) \leq M\} \leq C([K : \mathbb{Q}], d, M).$$

En fonction de l'état d'avancement du mémoire, on essayera de construire la hauteur canonique qui est une modification de la notion de hauteur dans le cas où on a en plus un morphisme $f\ \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{Q}})$ et on appliquera cette notion pour montrer la finitude des points périodiques sur une extension donnée.