UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
Mastère 2 Recherche de Mathématiques 2018-2019

Proposition de mémoire de Master 2

Jean-Paul Chehab (bur. C105),
`Jean-Paul.chehab@u-picardie.fr`

Modèles de séparation de phase - analyse numérique et simulation

Durée : 4 mois
Lieu : LAMFA, UMR CNRS 7352
Mots clés : EDP paraboliques non linéaires, Analyse numérique, éléments finis, FreeFem++

Les équations de Cahn-Hilliard (CH) sont considérés dans de nombreux modèles de séparation de phase. Elles consistent en en flot de gradient en norme H^{-1}

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\left(-\Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u)\right) = 0, \quad x \in \Omega, t \in (0, T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \Omega. \tag{3}$$

Ici $\epsilon > 0$ est la largeur de l'interphase, f est la dérivée du potentiel F et l'énergie libre de Ginzburg-Landau

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega F(u)$$

décroit le long des orbites, la masse $\int_\Omega u(x,t)dx$ est conservée au cours du temps.

Initialement introduites en sciences des matériaux, ces équations connaissent depuis des généralisations dans différentes directions

- Par ajout d'une non-linéarité :

  $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\left(-\Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u)\right) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

  qui permet de considérer des problèmes relatifs à la dynamique des populations, la croissance tumorale, la retouche d'image [1], l'agglomérat de moules [7], pour ne citer que quelques exemples, on consultera [3, 4] pour plus de détails.

- L'utilisation d'opérateurs d'ordre élevés, permet d'introduire une anisotropie (vitesse de diffusion différente suivant les directions)

  $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\left(\mathbf{P}(-\Delta)u + \frac{1}{\epsilon^2} f(u)\right) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

  où P est un polynôme, $P(s) = \sum_{i=1}^{k} a_i s^i$ avec $a_k > 0$. Par exemple pour k=1 et $a_1 = 1$ on retrouve CH classique, on considèrera les cas $k = 2, 3$. Ces modèles sont utilisés en croissance dentritique

Dans ce mémoire, on propose de considérer quelques unes de ces équations de Cahn-Hilliard généralisées, de construire des codes de simulation et de faire l'analyse numérique de quelques schémas [5, 6, 8]. A cet effet, on s'appuiera sur certaines parties de la thèse [4] . On commencera par étudier séparément des méthodes numériques pour les équations de phases ; les éléments finis seront utilisés pour la discrétisation en espace, les calculs seront effectués à l'aide du logiciel FreeFem++[2].

References

[1] Jessica Bosch, David Kay, Martin Stoll and Andrew J. Wathenk, Fast Solvers for Cahn-Hilliard Inpainting, SIAM J. IMAGING SCIENCES 2013

[2] FreeFem++ page. http : //www.freefem.org

[3] Dongsun Lee a, Joo-Youl Huh b, Darae Jeong a, Jaemin Shin a, Ana Yun a, Junseok Kim, Physical, mathematical, and numerical derivations of the Cahn-Hilliard equation, Computational Materials Science 81 (2014) 216–225

[4] S. Peng, Analyse Mathématque et numériques de plusieurs problèmes non-linéaires, Thèse, Université de Poitiers, décembre 2018

[5] J. Shen and X. Yang. Numerical Approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard Equations. DCDS, Series A, 28 : (2010), 1669-1691.

[6] G. Tierra1, F. Guillen-Gonzalez, Numerical methods for solving the Cahn-Hilliard equation and its applicability to related Energy-based models, Necas Center for Mathematical Modeling, 2013

[7] J. Van Koppel `https://johanvandekoppel.nl/research/the-dance-of-the-mussel/`

[8] Benjamin P. Vollmayr-Lee, Andrew D. Rutenberg, Fast and accurate coarsening simulation with an unconditionally stable time step, PHYSICAL REVIEW E 68, 066703 2003