

Corrigé de l'examen 2017-2018

Exercice 1

- 1) Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 2$ est donné par

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0.$$

Ainsi, ce trinôme n'admet pas de racines réelles. De ce fait, il ne change jamais de signe sur $\mathbb{R}$ et comme sa valeur en 0 est $0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2 > 0$, il est toujours strictement positif et donc son logarithme est toujours défini. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- 2) Le logarithme est dérivable dès qu'il est défini : sur $\mathbb{R}_+^*$ et le trinôme $x^2 + 2x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$D_{f'} = \mathbb{R}.$$

De plus, en posant $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x^2 + 2x + 2$, on a $f = u \circ v$ et, par dérivation de fonctions composées, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(v(x))v'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2}.$$

- 3) On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x + 2 = +\infty$$

ainsi que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = +\infty.$$

De plus, comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty$, on obtient, par composition de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- 4) Étudions le signe de f' : puisqu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 2},$$

on obtient

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

On en tire le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		0	

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned} f(-2-x) &= \ln((-2-x)^2 + 2 \times (-2-x) + 2) \\ &= \ln(4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2) = \ln(x^2 + 2x + 2) = f(x). \end{aligned}$$

Ceci entraîne, en posant $y = 1 + x$,

$$f(-1-y) = f(-2-x) = f(x) = f(-1+y).$$

En en tire que

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(-1-y) = f(-1+y).$$

D'après le cours, ceci signifie que le graphe de f présente une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

6) Soit $x > 0$. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln(x^2 + 2x + 2)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} \\ &= \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x}. \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} \right) = 0.$$

D'après le cours, ceci signifie que le graphe de la fonction f admet une branche parabolique de direction O_x au voisinage de $+\infty$. De plus, puisque le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$, on en déduit que ce graphe admet également une branche parabolique de direction O_x au voisinage de $-\infty$.

7) Rappelons que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 2}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En posant $u : x \mapsto 2(x+1)$ et $v : x \mapsto x^2 + 2x + 2$, on a $f' = \frac{u}{v}$ et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 2) - 2(x+1)(2x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 4 - 4(x+1)^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2}, \end{aligned}$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{-2x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

- 8) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ (i.e. est deux fois dérivable et de dérivée seconde continue), dire que f est convexe sur un intervalle I c'est dire que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Vue l'expression de f'' , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2x(x+2) > 0 \Leftrightarrow x(x+2) < 0.$$

Or, $x(x+2) < 0$ si et seulement si x et $x+2$ sont de signes différents. Si $x > 0$, alors $x+2 > 0$ et donc $x(x+2) > 0$. Si $x < 0$, alors $x(x+2) < 0$ si et seulement si $x+2 > 0$, soit $x > -2$. On en tire que

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[.$$

Ainsi, f est convexe sur $]-2, 0[$ et concave sur $] -\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. Ses points d'inflexion sont -2 et 0 . L'équation de la tangente T_a à f en un point a étant donnée par $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$, ici on a

$$T_{-2} : y = -(x+2) + \ln(2) = -x - 2 + \ln(2)$$

et

$$T_0 : y = x.$$

- 9) On a directement que la tangente en -1 (qui est le seule extremum local de f d'après son tableau de variations) est donnée par l'équation

$$T_{-1} : y = 0.$$

On obtient l'allure du graphe de f :

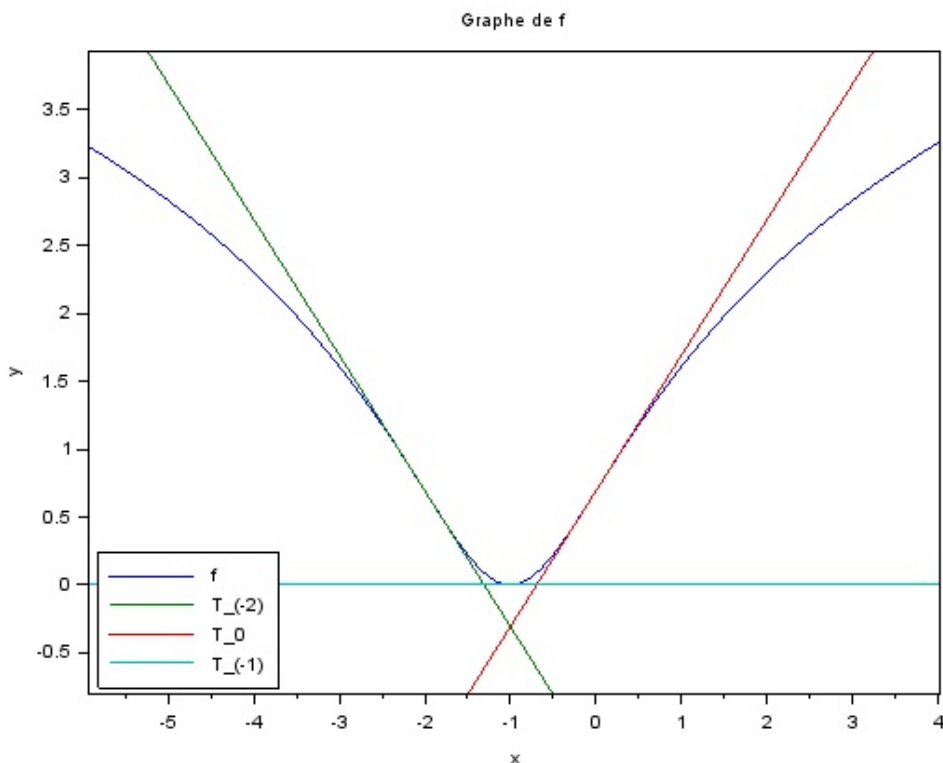


FIGURE 0.1 – Graphe de $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$

Exercice 2

- 1) L'équation homogène (EH) associée à l'équation différentielle (E) s'écrit

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (\text{EH})$$

- 2) L'équation caractéristique (EC) associée à (EH) s'écrit

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (\text{EC})$$

- 3) Le discriminant de (EC) est donné par

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$$

On a donc deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1 \quad r_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Ainsi, d'après le cours, les solutions y_h de (EH) sont données par

$$y_h(x) = ke^{r_1x} + \ell e^{r_2x} = ke^x + \ell e^{2x}, \quad k, \ell \in \mathbb{R}.$$

- 4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et supposons que $f(x) := a \sin(x) + b \cos(x)$ soit une solution de (E). On calcule les dérivées première et seconde de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a \cos(x) - b \sin(x), \quad f''(x) = -a \sin(x) - b \cos(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) &= -a \sin(x) - b \cos(x) - 3a \cos(x) + 3b \sin(x) + 2a \sin(x) + 2b \cos(x) \\ &= (3b + a) \sin(x) + (b - 3a) \cos(x). \end{aligned}$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si on a

$$(3b + a) \sin(x) + (b - 3a) \cos(x) = \sin(x)$$

et, par identification des coefficients, ceci revient à dire que

$$\begin{cases} 3b + a = 1 \\ b - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b + a = 1 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + a = 1 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 1 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction

$$y_p(x) = f(x) = \frac{\sin(x) + 3 \cos(x)}{10}$$

est solution particulière de (E).

- 5) D'après le principe de superposition, toute solution de (E) est somme de la solution particulière et d'une solution de (EH). Ainsi, les solutions de (E) sont données par

$$y(x) = ke^x + \ell e^{2x} + \frac{\sin(x) + 3 \cos(x)}{10}, \quad k, \ell \in \mathbb{R}.$$

6) Soit f une solution de (E). D'après la question précédente, f s'écrit

$$f(x) = ke^x + \ell e^{2x} + \frac{\sin(x) + 3 \cos(x)}{10},$$

pour des réels $k, \ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On calcule

$$1 = f(0) = k + \ell + \frac{3}{10}.$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ke^x + 2\ell e^{2x} + \frac{\cos(x) - 3 \sin(x)}{10}.$$

Ainsi, on doit avoir

$$0 = f'(0) = k + 2\ell + \frac{1}{10}.$$

On obtient ainsi le système linéaire

$$\begin{aligned} \begin{cases} k + \ell + \frac{3}{10} = 1 \\ k + 2\ell + \frac{1}{10} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k + \ell = \frac{7}{10} \\ k + 2\ell = -\frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + \ell = \frac{7}{10} \\ \frac{7}{10} + \ell = -\frac{1}{10} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k + \ell = \frac{7}{10} \\ \ell = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ \ell = -\frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ et celle-ci est donnée par

$$f(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{4}{5}e^{2x} + \frac{\sin(x) + 3 \cos(x)}{10} = \frac{15e^x - 8e^{2x} + \sin(x) + 3 \cos(x)}{10}.$$

Exercice 3

1) D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x te^t dt$$

est une primitive de $t \mapsto te^t$ (c'est la primitive qui s'annule en 0). En posant $u : t \mapsto e^t$ et $v : t \mapsto t$ et en faisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= \int_0^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt \\ &= [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto xe^x$ est donnée par

$$x \mapsto (x-1)e^x.$$

- 2) D'après le cours, les solutions de l'équation (EH) s'écrivent $y_h(x) = ke^{G(x)}$ avec G une primitive de $x \mapsto xe^x$ et $k \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on peut prendre $G(x) = (x-1)e^x$ et donc, les solutions de (EH) sont données par

$$y_h(x) = ke^{(x-1)e^x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- 3) On remarque immédiatement que la fonction constante égale à -1 est solution particulière de l'équation (E).
4) Par superposition, les solutions y de (E) sont données par

$$y(x) = ke^{(x-1)e^x} - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$