Corrigé de l'examen 2018-2019

Exercice 1 :
Le réel

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 4}$$

est défini si et seulement si le réel $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ est défini et si $x - 4 \neq 0$, soit $x \neq 4$. Pour que le réel $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ soit défini, il faut et il suffit que $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Étudions le signe de ce trinôme. Son discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$, donc il a deux racines $x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$ et, comme son coefficient dominant est positif, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \iff x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[.$$

Ainsi, le réel $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$ et $x \neq 4$ et donc, le domaine de définition de f est donné par

$$D_f =]-\infty; 2] \cup [3; 4[\cup]4; +\infty[.$$

Exercice 2 :
On calcule la limite avec l'expression conjuguée :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+5})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{x+5})^2}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4-(x-5)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+5}} = 0.$$

Exercice 3 :
Avec le changement de variables $u = 1 + e^t$, on a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^t$ soit $\mathrm{d}u = e^t \mathrm{d}t$ et, si $t = 0$ alors $u = 1 + e^0 = 2$ et si $t = \ln(2)$ alors $u = 1 + e^{\ln(2)} = 1 + 2 = 3$ et donc

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t \mathrm{d}t}{1 + e^t} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln|u|]_2^3 = \ln|3| - \ln|2| = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Exercice 4 :

a) L'équation homogène (EH) associée à (E) est donnée par

$$(EH)\ :\ y'' - 4y' + 4y = 0.$$

b) L'équation caractéristique associée à (EH) est donnée par

$$(EC) \ : \ x^2 - 4x + 4 = 0.$$

c) Le discriminant de l'équation caractéristique (EC) est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, donc (EC) admet une unique solution $x_0 = 4/2 = 2$. Par la formule du cours, ceci implique que les solutions de (EH) s'écrivent sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y_h(x) = (k + \ell x)e^{x_0 x} = (k + \ell x)e^{2x},$$

avec $k, \ell \in \mathbb{R}$ des constantes quelconques.

d) **Il y a une faute de frappe dans l'énoncé ! Si ça arrive le jour de l'examen, la question sera annulée, à moins que ce ne soit signalé par les surveillants pendant l'épreuve. Si vous le repérez et trouvez la bonne forme, ce sera compté en point bonus.** Il faut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2e^{2x}$. On calcule $y_p'(x) = 2axe^{2x} + 2ax^2e^{2x} = (2ax^2 + 2ax)e^{2x}$ et $y_p''(x) = (4ax + 2a)e^{2x} + 2(2ax^2 + 2ax)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$ et donc

$$y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x} - 4(2ax^2 + 2ax)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2ae^{2x}$$

et, d'un autre côté, comme y_p doit être une solution de (E), on doit avoir $y_p'' - 4y_p' + 4y_p = e^{2x}$, d'où $2ae^{2x} = e^{2x}$ soit $2a = 1$ et donc $a = 1/2$. Ainsi, une solution particulière de (E) est donnée par $y_p(x) = \frac{x^2e^{2x}}{2}$.

e) Par le principe de superposition (cours), les solutions de (E) s'écrivent sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (k + \ell x)e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x} = \left(k + \ell x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x},$$

avec $k, \ell \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Exercice 5 :

a) Pour trouver les primitives de $t \mapsto te^t$, on fait une intégration par parties en posant $v(t) = t$ et $u'(t) = e^t$ (il faut dériver le polynôme pour obtenir une constante). Pour trouver une primitive, on peut par exemple intégrer de 0 à x. On calcule

$$\int_0^x te^t \mathrm{d}t = \int_0^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

$$= u(x)v(x) - u(0)v(0) - \int_0^x e^t \mathrm{d}t = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1.$$

Les primitives étant définies à une constante près, on en déduit que les primitives de $t \mapsto te^t$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (x-1)e^x + k,$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante.

b) L'équation homogène associée à (E) est

$$y' - te^t y = 0$$

et, par la formule du cours, ses solutions s'écrivent sous forme d'une exponentielle d'une primitive de $t \mapsto te^t$ et, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto (t-1)e^t$ est une telle primitive. Ainsi, les solutions de l'équation homogène associée à (E) s'écrivent

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_h(t) = ke^{(t-1)e^t},$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante.

c) On applique la "variation de la constante" : cherchons une solution particulière y_p sous la forme $y_p(t) = k(t)e^{(t-1)e^t}$. On a $y_p'(t) = k'(t)e^{(t-1)e^t} + tk(t)e^t e^{(t-1)e^t}$ et donc

$$y_p'(t) - te^t y_p(t) = k'(t)e^{(t-1)e^t} + \cancel{tk(t)e^t e^{(t-1)e^t}} - \cancel{te^t k(t)e^{(t-1)e^t}} = k'(t)e^{(t-1)e^t}$$

et comme on veut que $y_p' + te^t y_p = e^{(t-1)e^t}$, on doit avoir

$$\forall t \in \mathbb{R},\ k'(t)e^{(t-1)e^t} = e^{(t-1)e^t} \implies k'(t) = 1 \implies k(t) = t$$

et donc on peut prendre $y_p(t) = k(t)e^{(t-1)e^t} = te^{(t-1)e^t}$.

d) Par le principe de superposition (cours), les solutions de (E) s'écrivent

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ke^{(t-1)e^t} + te^{(t-1)e^t} = (k+t)e^{(t-1)e^t},$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque.

Exercice 6 :

a) Le réel $\ln(x^2 - 5x + 6)$ est défini si et seulement si $x^2 - 5x + 6 > 0$. On calcule $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$. Comme le coefficient dominant du trinôme est positif, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 > 0 \iff x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

et donc

$$D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[.$$

b) Si $5/2 - h$ est dans D_f, alors il est dans l'un des intervalles $]-\infty; 2[$ ou $]3; +\infty[$. On étudie chacun des cas. Si $5/2 - h \in]-\infty, 2[$, alors on a $5/2 - h < 2$, donc $-h < 2 - 5/2 = -1/2$ et donc $h > 1/2$ et en ajoutant $5/2$, on obtient $h + 5/2 > 5/2 + 1/2 = 3$ et donc $5/2 + h \in]3; +\infty[$ et donc $5/2 + h \in D_f$. L'autre possibilité est $5/2 - h \in]3; +\infty[$, soit $5/2 - h > 3$ ou encore $-h > 3 - 5/2 = 1/2$ et donc $h < -1/2$, d'où $h + 5/2 < -1/2 + 5/2 = 2$. Ceci implique que $h + 5/2 \in]-\infty; 2[$ et donc $5/2 + h \in D_f$. Donc dans les deux cas, si $5/2 - h \in D_f$ alors $5/2 + h \in D_f$, comme voulu.

Maintenant, soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $h - 5/2 \in D_f$. On vient de voir que ceci implique que $5/2 + h \in D_f$ et on calcule d'une part

$$f\left(\frac{5}{2} - h\right) = \ln\left(\left(\frac{5}{2} - h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2} - h\right) + 6\right) = \ln\left(\frac{25}{4} - 5h + h^2 - \frac{25}{2} + 5h + 6\right)$$

$$= \ln\left(h^2 - \frac{25}{4} + 6\right) = \ln\left(h^2 - \frac{1}{4}\right)$$

et d'autre part

$$f\left(\frac{5}{2}+h\right) = \ln\left(\left(\frac{5}{2}+h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}+h\right) + 6\right) = \ln\left(\frac{25}{4} + 5h + h^2 - \frac{25}{2} - 5h + 6\right)$$

$$= \ln\left(h^2 - \frac{25}{4} + 6\right) = \ln\left(h^2 - \frac{1}{4}\right)$$

et on trouve bien le même résultat, donc $f(5/2-h) = f(5/2+h)$. Par le cours, on en déduit que le graphe de f admet une symétrie par rapport à l'axe $x = 5/2$.

c) Le logarithme est dérivable dès qu'il est défini : sur $\mathbb{R}_+^*$ et le trinôme $x^2 - 5x + 6$ est strictement positif sur D_f, donc

$$D_{f'} = D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[.$$

Ensuite, f s'écrit comme la composée $f = u \circ v$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2 - 5x + 6$. On a donc

$$\forall x \in D_{f'},\ f'(x) = u'(v(x))v'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

d) Les bornes de D_f sont $-\infty$, 2, 3 et $+\infty$ (attention, on doit regarder les limites en 2^- et en 3^+ pour rester dans le domaine de f). Par symÃ©trie du graphe par rapport à l'axe $x = 5/2$, il suffit de calculer les limites en $-\infty$ et en 2^-. On a d'abord

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 - 5x + 6) = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2 - 5x + 6) = 0^+$$

et, comme $\lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty.$$

e) On étudie le comportement de f seulement en $+\infty$, car le graphe de f présente une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = 5/2$. Comme on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on doit calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$. Il s'agit d'une factorisation utilisant les propriétés de ln : on calcule

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-5x+6)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+\ln\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x}\right).$$

Or, on a $\lim_{x\to+\infty}\ln(1-5/x+6/x^2) = \ln(1) = 0$ donc a fortiori, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1-x/5+6/x^2) = 0$. De plus, par croissances comparées on a $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)/x = 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x}\right) = 0.$$

Par le cours, ceci signifie que le graphe de f admet une branche parabolique de direction O_x en $+\infty$ et, par symétrie axiale, le graphe de f admet également une branche parabolique de direction O_x en $-\infty$.

Remarque additionnelle : le fait que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ entraîne que le graphe de f admet une asymptote verticale en 2^- et en 3^+.

f) Il faut calculer le signe de f' : rappelons que, pour $x \in D_{f'} = D_f$, on a

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

Or, sur $D_{f'} =]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$, on a $x^2-5x+6 > 0$ et donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $2x-5 \geq 0$, soit $x \geq 5/2$. Comme $x \in D_f$ ceci signifie en fait que $x \in]3;+\infty[$. On en déduit que

$$\forall x \in D_{f'},\ f'(x) \geq 0 \iff x \in]3;+\infty[.$$

Ainsi, le tableau des variations de f est donné par

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$\varnothing$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\vert$ $-\infty$	$\varnothing$	$\vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

g) Le graphe de f a l'allure suivante :

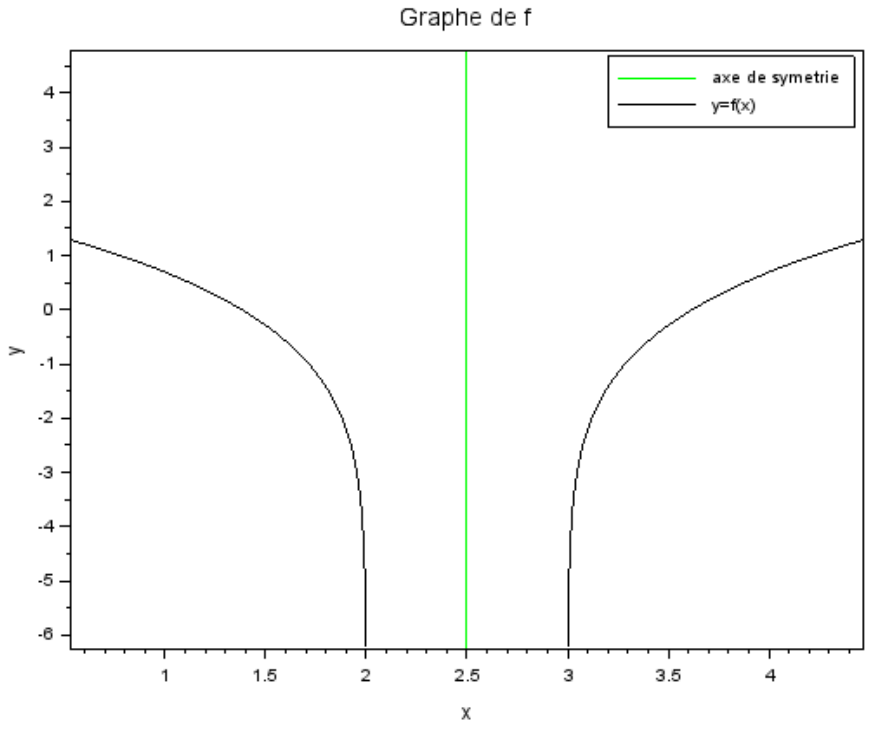

FIGURE 0.1 – Graphe de $f : x \mapsto \ln(x^2-5x+6)$