Théorème de Brouwer

Lemme 1. *(Milnor)*
Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de K et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert relativement compact tel que $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$. Soit encore $v : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\begin{array}{cccc} v_t & : & U & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \to & x + tv(x) \end{array}$$

Alors,

1. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|t| < \alpha$, on ait $\det(dv_t(x)) > 0$, pour tout $x \in \Omega$.*
2. *Il existe $\gamma > 0$ tel que $vt : \Omega \to v_t(\Omega)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

Démonstration. 1. Pour tous t, x on a $dv_t(x) = id_{\mathbb{R}^n} + tdv(x)$. Sur le compact $\kappa := [-1,1] \times \overline{\Omega}$, on définit la fonction continue $(t,x) \mapsto \det(dv_t(x))$, qui en vertu du théorème de Heine, est uniformément continue sur κ et pour $\varepsilon := \frac{1}{2}$ choisissons $\eta > 0$ tel que

$$\forall (t,x), (t',x') \in \kappa,\ \|(t-t', x-x')\| < \eta \ \Rightarrow\ |\det(dv_t(x)) - \det(dv_{t'}(x')| < \frac{1}{2},$$

d'où

$$\forall t \in [-1,1],\ \forall x \in \overline{\Omega},\ |t| = \|(t,0)\| < \eta \ \Rightarrow\ |\det(dv_t(x)) - 1| < \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \det(dv_t(x)) > 0,$$

et $\alpha = \eta$ convient.

2. D'après le théorème des accroissements finis, toute application de classe $\mathcal{C}^1$ est localement lipschitzienne et donc lipschitzienne sur tout compact. On en déduit que v est lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$, de rapport k, disons. Soient $x, y \in \overline{\Omega}$ et supposons que $v_t(x) = v_t(y)$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \|v_t(y) - v_t(x)\| &= \|y - x + t(v(y) - v(x))\| \\ &\geq |\|y-x\| - |t|\|v(y) - v(x)\|| \geq |(1 - |t|k)\|y - x\||, \end{aligned}$$

ainsi, si $|t| < \frac{1}{k}$, v_t est injective sur $\overline{\Omega}$, donc sur Ω. Si $\gamma := \min\left(\frac{1}{k}, \alpha\right)$, alors v_t est injective sur Ω et de différentielle inversible et donc $v_t : \Omega \to v_t(\Omega)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'après la version globale du théorème d'inversion locale, ce qui conclut.

□

Théorème 1. *(Point fixe de Brouwer)*
Toute application continue $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ admet au moins un point fixe.

Démonstration. Tout d'abord, on peut supposer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est telle que $f(\mathbb{B}^n) \subset \mathring{\mathbb{B}}^n$. En effet, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n)$, par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite (g_k) de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_{\infty, \mathbb{B}^n}.$$

Posons alors

$$f_k := \frac{1 - \frac{1}{k}}{\max(1, \|g_k\|_\infty)} g_k.$$

On a $f_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $f_k(\mathbb{B}^n) \subset \overset{\circ}{(\mathbb{B}^n)}$ ainsi que $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_\infty = 0$. Supposons alors que $x_k \in \mathring{\mathbb{B}}^n$ soit un point fixe de f_k pour tout $k \geq 0$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (x_k) admet une valeur d'adhérence $x \in \mathbb{B}^n$ et considérons une sous-suite (x_{k_n}) de (x_k) qui converge vers x. Alors, on a $f(x) = x$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &\leq \|f(x) - f(x_{k_n})\| + \|f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})\| + \|x_{k_n} - x\| \\ &\leq \|f(x) - f(x_{k_n})\| + \|f - f_{k_n}\|_\infty + \|x_{k_n} - x\|, \end{aligned}$$

et en considérant $N_0 > 0$ assez grand, on a pour $n \geq N_0$, $\|f - f_{k_n}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|f(x) - f(x_{k_n})\| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\|x_{k_n} - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ et donc $\|f(x) - x\| < \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $f(x) = x$.

Soit donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $f(\mathbb{B}^n) \subset \mathring{\mathbb{B}}^n$. Si f n'admet pas de point fixe, alors il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{B}^n$ ainsi que $r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{S}^{n-1})$ tel que $r_{|\mathbb{S}^{n-1}} = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. En effet, posons $U := f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^n)$. Alors U est ouvert et $\mathbb{B}^n \subset U$. Si $x \in U$, on a $f(x) \neq x$, donc la demi-droite affine $\Delta_x := f(x) + \mathbb{R}_+(x - f(x))$ coupe $\mathbb{S}^{n-1}$ en un unique point $f(x) + t(x)(x - f(x))$. Si, pour un $t \geq 0$, on a $f(x) + t(x - f(x)) \in \Delta_x \cap \mathbb{S}^{n-1}$, alors

$$\|f(x) + t(x - f(x))\|_2^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \|f(x)\|^2 - 1 + 2t\,\langle f(x), x - f(x)\rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 = 0$$

ce qui est équivalent à

$$t = t(x) = \frac{\langle f(x), f(x) - x\rangle + \sqrt{\langle f(x), f(x) - x\rangle^2 + (1 - \|f(x)\|^2)\|f(x) - x\|^2}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

On voit alors que $x \mapsto t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\|x\| = 1$, alors $t(x) = 1$ et en définissant

$$r : x \mapsto f(x) + t(x)(x - f(x)),$$

on a bien $r(x) = x$ pour $\|x\| = 1$ et $r : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de telle application $r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{S}^{n-1})$. En effet, si tel était le cas, définissons

$$\begin{array}{rccc} v & : & U & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & r(x) - x \end{array}$$

et soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} v_t & : & U & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & x + tv(x) = (1-t)x + tr(x) \end{array}$$

On peut choisir un ouvert relativement compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{B}^n \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$. Soit $\delta > 0$, donné par le Lemme de Milnor, tel que pour $|t| < \delta$, $v_t : \Omega \to v_t(\Omega)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et tel que $\det(dv_t(x)) > 0$, pour tout $x \in \Omega$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \delta$. On a $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \mathring{\mathbb{B}}^n$. En effet, comme $v_{t|\Omega}$ est ouverte et que $\mathring{\mathbb{B}}^n$ est ouvert, $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ est ouvert dans $\mathring{\mathbb{B}}^n$. Ensuite, si (y_k) est une suite dans $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ telle que $y = \lim_{k\to\infty} y_k \in \mathring{\mathbb{B}}^n$, choisissons $x_k \in \mathring{\mathbb{B}}^n$ tels que $v_t(x_k) = y_k$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut choisir $x \in \mathbb{B}^n$ une valeur d'adhérence de (x_k), ainsi qu'une sous-suite (x_{k_n}) qui converge vers x. On a

$$v_t(x) = \lim_{n\to\infty} v_t(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = y$$

et si $\|x\| = 1$, alors $r(x) = x$, d'où $y = v_t(x) = x \notin \mathring{\mathbb{B}}^n$, ce qui est exclus. Ainsi, $y = v_t(x) \in v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ et donc $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ est fermé. On en tire que $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ est un ouvert-fermé non vide de $\mathring{\mathbb{B}}^n$ et par connexité de ce dernier ensemble, on a $v_t(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \mathring{\mathbb{B}}^n$. Comme, de plus, v_t est continue, on en

déduit que $v_t(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$.
Définissons

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \lambda_n(\mathbb{B}^n) - \int_{\mathbb{B}^n} \det(dv_t(x))dx \end{array}$$

Comme l'application $t \mapsto \det(dv_t(x)) = \det(id_{\mathbb{R}^n} + tdv(x))$ est polynômiale, il en est de même de $t \mapsto \int_{\mathbb{B}^n} \det(dv_t(x))dx$ et il en est donc de même de ϕ. Si $|t| < \delta$, on a par changement de variable,

$$\int_{\mathbb{B}^n} \det(dv_t(x))dx = \int_{v_t(\mathbb{B}^n)} ds = \int_{\mathbb{B}^n} ds \overset{\text{def}}{=} \lambda_n(\mathbb{B}^n),$$

d'où $\phi(t) = 0$. Ainsi, ϕ est identiquement nulle sur l'ouvert $]-\delta, \delta[$ et comme ϕ est un polynôme, elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $t = 1$, on obtient

$$0 = \phi(1) = \lambda_n(\mathbb{B}^n) - \int_{\mathbb{B}^n} \det(dv_1(x))dx = \lambda_n(\mathbb{B}^n) - \int_{\mathbb{B}^n} \det(dr(x))dx.$$

Si, pour un $x \in \mathbb{B}^n$, on avait $\det(dr(x)) \neq 0$, par le théorème d'inversion locale, il existerait un voisinage ouvert V de x dans U tel que $r : V \to r(V)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $r(V)$ serait alors un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{S}^{n-1}$, qui est d'intérieur vide et ceci est absurde. On en tire que $\det(dr(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{B}^n$ et donc

$$\lambda_n(\mathbb{B}^n) = \int_{\mathbb{B}^n} \det(dr(x))dx = 0.$$

Cette contradiction finale achève la preuve. □