DEVOIR

Dans tous les exercices, la lettre $\mathcal{P}$ désigne un plan réel euclidien, identifié à $\mathbb{C}$.

Exercice 1. (Théorèmes de Thébault et de Van Aubel)
Soit $ABCD$ un quadrilatère direct de $\mathcal{P}$. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres de gravité respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R et S.

1. Montrer que l'affixe p du centre de gravité P du carré s'appuyant sur $[AB]$ vérifie $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Trouver des relations analogues pour les autres carrés.
2. En déduire le *théorème de Thébault* : si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $PQRS$ est un carré.
3. En calculant $\frac{s-q}{r-p}$, prouver le *théorème de Van Aubel* : $PQRS$ est un pseudo-carré, c'est-à-dire que ses diagonales sont orthogonales et de même longueur.

Exercice 2. (Point de Vecten)
Soit ABC un triangle direct de $\mathcal{P}$. On construit trois carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Les centres de gravités respectifs de ces carrés sont notés P, Q et R. Le but de cet exercice est de montrer que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes. Le point de concours est appelé *point de Vecten* du triangle ABC.

1. Montrer que l'affixe p du centre de gravité P du carré s'appuyant sur $[AB]$ vérifie $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Trouver des relations analogues pour les autres carrés.
2. Montrer que les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité.
3. Prouver que (AQ) et (PR) sont orthogonales. Conclure.

Exercice 3. (Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)

1. Soit $u := e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$.
2. Posons $a := u^4+u$ et $b := u^3+u^2$. Montrer que $a+b = ab = -1$ et en déduire que $a \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. En déduire que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
4. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$.

Problème. (Caractérisation géométrique des similitudes)

Le but de cet exercice est de montrer qu'une bijection du plan est une similitude si et seulement si elle envoie tout cercle sur un cercle.

Soit donc $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une bijection envoyant tout cercle sur un cercle. Soient également trois points distincts A, B et C du plan $\mathcal{P}$ et notons $A' := f(A)$, $B' := f(B)$ et $C' := f(C)$.

1. Montrer que trois points du plan distincts sont cocycliques si et seulement s'ils ne sont pas alignés.

2. En déduire que si A', B' et C' sont alignés, alors A, B et C le sont aussi.

3. Supposons maintenant que A, B et C sont alignés, mais que A', B' et C' ne le sont pas.
   (a) Soient $D' \in (A'B')$ et $D := f^{-1}(D')$. Montrer que $D \in (AB)$.
   (b) Montrer que $f^{-1}((C'D')) \subset (AB)$.
   (c) En déduire que $f^{-1}(\mathcal{P}) \subset (AB)$ et conclure à une absurdité.
   (d) En tirer que $f \in GA(\mathcal{P})$.

4. Prouver que, quitte à post-composer f par une similitude, on peut supposer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ centré en l'origine O et de rayon $r > 0$ de P tel que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

5. Si $A \in \mathcal{C}$, notons $T_A\mathcal{C}$ la droite de $\mathcal{P}$, tangente à $\mathcal{C}$ en A. C'est l'unique droite $\mathcal{D}$ de P telle que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A\}$. Montrer que $f(T_A\mathcal{C}) = T_{f(A)}\mathcal{C}$.

6. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, O, A et B sont alignés si et seulement si $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$ sont parallèles.

7. Soient $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire et posons $A := O + r\vec{u}$ et $B := O - r\vec{u}$. En considérant les droites $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$, montrer que $f(O) = O$.

8. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de norme $\rho > 0$. Montrer que $f(O + r\rho^{-1}\vec{v}) \in \mathcal{C}$ et en déduire que $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \rho$.

9. En déduire que f est une isométrie et conclure.

10. Démontrer finalement le résultat annoncé.

Remarque : Ce résultat reste vrai en général avec une preuve similaire : une bijection d'un espace affine euclidien dans lui-même est une similitude si et seulement si elle envoie toute sphère sur une sphère.