

CORRECTION DU DEVOIR

Dans tous les exercices, la lettre $\mathcal{P}$ désigne un plan réel euclidien, identifié à $\mathbb{C}$.

Exercice 1. (Théorèmes de Thébault et de Van Aubel)

1. Par construction de P , le point A est l'image du point B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En notant a et b les affixes respectifs de A et B , on obtient la relation

$$a - p = e^{\frac{i\pi}{2}}(b - p) = i(b - p),$$

ce qui entraîne directement

$$p = \frac{a - ib}{1 - i},$$

comme souhaité. Les autres relations se démontrent exactement de la même manière et sont données par :

$$q = \frac{b - ic}{1 - i}, \quad r = \frac{c - id}{1 - i}, \quad s = \frac{d - ia}{1 - i}.$$

2. On va commencer par montrer que les segments PS et PQ sont perpendiculaires et de même longueur. Ceci est le cas si et seulement si S est l'image de Q par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc de montrer que $s - p = e^{\frac{i\pi}{2}}(q - p) = i(q - p)$. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, soit $b - c = a - d$. On calcule donc, en utilisant 1.,

$$\frac{s - p}{q - p} = \frac{\frac{d - ia}{1 - i} - \frac{a - ib}{1 - i}}{\frac{b - ic}{1 - i} - \frac{a - ib}{1 - i}} = \frac{d - a + i(b - c)}{b - a + i(b - c)} = \frac{d - a + i(b - a)}{b - a + i(a - d)} = i \frac{b - a + i(a - d)}{b - a + i(a - d)} = i$$

et on a donc bien $s - p = i(q - p)$. Avec le même genre de calcul et en utilisant le fait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on trouve que $p - q = i(r - q)$, donc R est l'image de P par la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le quadrilatère $PQRS$ admet donc au-moins trois angles droits et a au-moins trois de ses côtés de même longueur : c'est un carré.

3. On calcule

$$\frac{s - q}{r - p} = \frac{\frac{d - ia}{1 - i} - \frac{b - ic}{1 - i}}{\frac{c - id}{1 - i} - \frac{a - ib}{1 - i}} = \frac{(d - b) + i(c - a)}{(c - a) + i(b - d)} = i \frac{c - a + i(b - d)}{c - a + i(b - d)} = i.$$

On peut donc écrire

$$\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS} \rangle = (r - p)(\bar{s} - \bar{q}) + (\bar{r} - \bar{p})(s - q) = -i|r - p|^2 + i|r - p|^2 = 0,$$

donc les segments $[PR]$ et $[QS]$, qui sont les diagonales de $PQRS$, sont perpendiculaires. De plus, on a

$$\frac{QS}{PR} = \frac{\|\overrightarrow{QS}\|}{\|\overrightarrow{PR}\|} = \left| \frac{s - q}{r - p} \right| = |i| = 1$$

donc $PR = QS$ et les diagonales de $PQRS$ sont bien de même longueur ; donc $PQRS$ est bien un pseudo-carré.

Exercice 2. (Point de Vecten)

1. La preuve est exactement la même que dans la question 1. de l'exercice précédent. Les relations sont ici

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}, \quad q = \frac{b - ic}{1 - i}, \quad r = \frac{c - ia}{1 - i}.$$

2. Le centre de gravité de PQR est d'affixe $\frac{p+q+r}{3}$ et celui de ABC est d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$. Il s'agit ensuite d'écrire que

$$p + q + r = \frac{a - ib + b - ic + c - ia}{1 - i} = \frac{a(1 - i) + b(1 - i) + c(1 - i)}{1 - i} = a + b + c.$$

3. On calcule

$$\begin{aligned} 2 \langle \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{PR} \rangle &= (q - a)(\bar{r} - \bar{p}) + (r - p)(\bar{q} - \bar{a}) \\ &= \left(\frac{b - ic}{1 - i} - a \right) \left(\frac{\bar{c} + i\bar{a}}{1 + i} - \frac{\bar{a} + i\bar{b}}{1 + i} \right) + \left(\frac{c - ia}{1 - i} - \frac{a - ib}{1 - i} \right) \left(\frac{\bar{b} + i\bar{c}}{1 + i} - \bar{a} \right) \\ &= \frac{b - ic - a + ia}{1 - i} \frac{\bar{c} + i\bar{a} - \bar{a} - i\bar{b}}{1 + i} + \frac{c - ia - a + ib}{1 - i} \frac{\bar{b} + i\bar{c} - \bar{a} - i\bar{a}}{1 + i} \\ &= \frac{1}{2} ((b\bar{c} + ib\bar{a} - b\bar{a} - i|b|^2 - i|c|^2 + c\bar{a} + ic\bar{a} - c\bar{b} - a\bar{c} - i|a|^2 + |a|^2 + ia\bar{b} + ia\bar{c} - |a|^2 - i|a|^2 + a\bar{b}) \\ &\quad + (c\bar{b} + i|c|^2 - c\bar{a} - ic\bar{a} - ia\bar{b} + a\bar{c} + i|a|^2 - |a|^2 - a\bar{b} - ia\bar{c} + |a|^2 + i|a|^2 + i|b|^2 - b\bar{c} - ib\bar{a} + b\bar{a})) = 0. \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi écrire plus simplement

$$\frac{r - p}{q - a} = \frac{(c - ia) - (a - ib)}{1 - i} \times \frac{1 - i}{(b - ic) - a(1 - i)} = \frac{c - a + i(b - a)}{b - a + i(a - c)} = i.$$

Donc $\langle \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{PR} \rangle = 0$ et donc (AQ) et (PR) sont bien orthogonales. De la même façon, on montre que (CP) et (QR) sont orthogonales, ainsi que (BR) et (PQ) . Ceci signifie que les droites (QA) , (PC) et (RB) sont les hauteurs du triangle PQR et sont donc concourantes. De plus, le point de Vecten est l'orthocentre du triangle PQR .

Exercice 3. (Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)

1. Soit $u := e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et commençons par noter que $u^5 = 1$. Une première méthode consiste à remarquer que les points d'affixes u^4, u^3, u^2, u et 1 forment un pentagone régulier centré en 0 . Or, le point d'affixe $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1$ est l'isobarycentre de ces points ; c'est donc 0 .
Une autre méthode s'appuie sur l'identité suivante, valable dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

et, puisque $u \neq 1$, on doit avoir $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$.

2. D'après 1., on a déjà $a + b = u^4 + u^3 + u^2 + u = -1$. Ensuite, on a $ab = (u^4 + u)(u^3 + u^2) = u^7 + u^6 + u^4 + u^3 = u^2 + u + u^4 + u^3 = -1$. Pour trouver a et b , l'astuce est la suivante : pour tout trinôme unitaire $X^2 + \lambda X + \mu$, les racines x_1 et x_2 de ce trinôme vérifient $x_1 + x_2 = -\lambda$ et $x_1 x_2 = \mu$. Ici, il faut donc trouver les racines du trinôme $X^2 - (a + b)X + ab = X^2 + X - 1$. Ce dernier trinôme se résout facilement et on trouve bien $a \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$ et $b = -1 - a$.
3. On a $a = u^4 + u = u^{-1} + u = \bar{u} + u = 2\Re(u) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Ceci montre que $a > 0$ et, d'après 2., on obtient $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, d'où le résultat.
4. On a $1 = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$, d'où $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{2\sqrt{5} + 10}{16}$ et, puisque $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on en tire que

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

5. On utilise l'identité suivante

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2.$$

On a donc $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$. En ajoutant cette dernière identité à $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1$, on obtient $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{4} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

on en déduit aussi

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Enfin, on a

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4},$$

ainsi que

$$\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Problème.

- Soient donc trois points X, Y et Z du plan et considérons $\mathcal{M}_{X,Y}$ et $\mathcal{M}_{Y,Z}$ les médiatrices respectives de X, Y et Y, Z . Si X, Y et Z ne sont pas alignés, alors $\mathcal{M}_{X,Y}$ et $\mathcal{M}_{Y,Z}$ ne sont pas parallèles, donc sont concourantes en un point T . Le cercle de centre T et de rayon $\|\overrightarrow{TX}\|$ contient donc X, Y et Z . Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est un cercle contenant X, Y et Z , supposons par l'absurde que X, Y et Z soient alignés. La droite (XY) ne peut intersecter $\mathcal{C}$ qu'en au-plus deux points. On a déjà $X, Y \in (XY) \cap \mathcal{C}$, donc on doit avoir $(XY) \cap \mathcal{C} = \{X, Y\}$. Mais, puisque $Z \in (XY)$, on ne peut avoir $Z \in \mathcal{C}$, ce qui est absurde.
- Supposons par l'absurde que A', B' et C' soient alignés sans que A, B et C le soient. D'après 1., il existe un cercle $\mathcal{C}$ contenant A, B et C . Alors, $f(\mathcal{C})$ est un cercle qui contient A', B' et C' , qui ne peuvent donc être alignés d'après 1. Cette absurdité montre que A, B et C sont alignés.
- D'après 2., si A', D et B' sont alignés, alors $A, f^{-1}(D') = D$ et B aussi, i.e., $D \in (AB)$.
 - Soit $X \in f^{-1}((C'D'))$. Alors, $f(X), C'$ et D' sont alignés. D'après 2., ceci entraîne que X, C et D soient alignés, i.e. $X \in (CD)$. Mais on a par hypothèse $C \in (AB)$ et $D \in (AB)$ d'après (a) et donc $X \in (AB)$. Ceci étant vrai pour tout $X \in f^{-1}((C'D'))$, on en déduit que $f^{-1}((C'D')) \subset (AB)$.
 - Puisque A', B' et C' ne sont pas alignés, ils forment un repère affine de $\mathcal{P}$. Soit $X \in \mathcal{P}$ un point quelconque. Le point $X' := f(X)$ est barycentre de A', B' et C' ; notons $X = \lambda_1 A' + \lambda_2 B' + \lambda_3 C'$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Le point $D' := \lambda_1 A' + \lambda_2 B'$ est sur $(A'B')$ et, par associativité des barycentres, le point X est barycentre de C' et D' , donc est sur $(C'D')$. D'après (b), ceci implique que $X = f^{-1}(X') \in (AB)$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{P}$, on en tire que $f^{-1}(\mathcal{P}) \subset (AB)$. Comme f est une bijection $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, on doit avoir $\mathcal{P} = f^{-1}(\mathcal{P}) \subset (AB)$ et ceci est absurde.
 - L'absurdité de (d) montre que, si A, B et C sont trois points alignés, alors leurs images $f(A), f(B)$ et $f(C)$ le sont également. La bijection f préserve donc l'alignement. Par le théorème fondamental de la géométrie affine, f est donc une bijection affine, i.e. $f \in GA(\mathcal{P})$.
- Soit $\mathcal{C}$ un cercle quelconque de centre O et de rayon $r > 0$. Par hypothèse, $\mathcal{C}' := f(\mathcal{C})$ est un cercle, de centre un point X et de rayon $r' > 0$. Soient h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{r}{r'}$, ainsi que t la translation de vecteur $\overrightarrow{XO}$. Alors, $s := h \circ t$ est une similitude telle que $s(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$. Dans ce cas, on a $s \circ f(\mathcal{C}) = s(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$. Maintenant, si l'on montre que $s \circ f$ est une similitude, f le sera aussi, d'où le résultat.

5. Puisque f est affine, $f(T_A\mathcal{C})$ est une droite de $\mathcal{P}$ et on a $\{f(A)\} = f(T_A\mathcal{C} \cap \mathcal{C}) = f(T_A\mathcal{C}) \cap f(\mathcal{C}) = f(T_A\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}$. La droite $f(T_A\mathcal{C})$ est donc une droite de $\mathcal{P}$ qui intersecte $\mathcal{C}$ en $f(A)$ uniquement, c'est donc $T_{f(A)}\mathcal{C}$.
6. Soient $A, B \in \mathcal{C}$. Si O, A et B sont alignés, puisque $T_A\mathcal{C}$ est orthogonale à (OA) et $T_B\mathcal{C}$ est orthogonale à $(OB) = (OA)$, les droites $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$ sont toutes deux orthogonales à la même droite $(OA) = (OB)$, elles sont parallèles. Réciproquement, si $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$ sont parallèles, alors (OA) et (OB) , étant respectivement orthogonales à $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$, sont parallèles. Puisque (OA) et (OB) sont parallèles et concourantes, elles sont égales et donc A, O et B sont alignés.
7. Vu que $A = O + r\vec{u}$ et $B = O - r\vec{u}$, les points O, A et B sont alignés, donc d'après 6., les droites $T_A\mathcal{C}$ et $T_B\mathcal{C}$ sont parallèles. Puisque f est affine, les droites $T_{f(A)}\mathcal{C} = f(T_A\mathcal{C})$ et $T_{f(B)}\mathcal{C} = f(T_B\mathcal{C})$ sont parallèles, donc les points $O, f(A)$ et $f(B)$ sont alignés. Maintenant, puisque f est affine et O est isobarycentre de A et B , le point $f(O)$ est isobarycentre de $f(A)$ et $f(B)$. Mais, puisque O est aligné avec $f(A)$ et $f(B)$, il est aussi isobarycentre de $f(A)$ et $f(B)$. Les points O et $f(O)$ sont donc isobarycentres de $f(A)$ et $f(B)$ et sont donc égaux.
8. Notons $X := O + r\rho^{-1}\vec{v}$. On a $\|O\vec{X}\| = \|r\rho^{-1}\vec{v}\| = r\rho^{-1}\|\vec{v}\| = r$, donc $X \in \mathcal{C}$ et donc $f(X) \in f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Ensuite, on a $f(X) = f(O + r\rho^{-1}\vec{v}) = f(O) + \vec{f}(r\rho^{-1}\vec{v}) = f(O) + r\rho^{-1}\vec{f}(\vec{v}) = O + r\rho^{-1}\vec{f}(\vec{v})$ et, puisque $f(X) \in \mathcal{C}$, on a $r = \|O\vec{f(X)}\| = \|r\rho^{-1}\vec{f}(\vec{v})\| = r\rho^{-1}\|\vec{f}(\vec{v})\|$ et donc $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \rho = \|\vec{v}\|$.
9. D'après 8., on a que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on a $\|\vec{f}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, ce qui signifie que $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle, ce qui veut dire par définition que f est une isométrie affine, donc est une similitude. D'après la question 4., f est donc la composée de deux similitudes, donc est une similitude.
10. On vient de voir que, si $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une bijection qui envoie tout cercle sur un cercle, alors c'est une similitude. Réciproquement, si $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ et si $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $r > 0$, alors $f\mathcal{C}$ est le cercle de centre $f(A)$ et de rayon $\lambda r > 0$, donc f envoie tout cercle sur un cercle. Ceci démontre le résultat voulu.

Barème : 24 pts

Exercice 1. 4 pts

1. 1 pt
2. 2 pts
3. 1 pt

Exercice 2. 4 pts

1. 1 pt
2. 1 pt
3. 2 pts

Exercice 3. 4 pts

1. 1 pt
2. 1 pt
3. 0.5 pt
4. 0.5 pt
5. 1 pt

Problème. 12 pts

1. 1 pt
2. 1 pt
3. (a) 0.5 pt
(b) 0.5 pt
(c) 0.5 pt
(d) 0.5 pt
4. 1.5 pts
5. 1 pt
6. 1 pt
7. 1.5 pts
8. 1 pt
9. 1 pt
10. 1 pt