Exercice 1
Prouver que si x une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a,b[$ avec $b<+\infty$, de dérivée bornée au voisinage de b, alors la limite $\lim\limits_{t\to b^-} x(t)$ existe et est finie.

Exercice 2
On considère l'équation différentielle $x' = \dfrac{1}{x^2+t^2}$.

1. Étudier l'existence et l'unicité locale, ainsi que la validité du théorème d'existence globale.

2. Vérifier que si x est solution sur $]a,b[$, alors $t\mapsto -x(-t)$ est solution sur $]-b,-a[$.

3. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x(t_0)=x_0$ avec $t_0>0$ est définie au-moins sur $]0,+\infty[$. En déduire que la solution maximale avec $t_0<0$ est définie au-moins sur $]-\infty,0[$.

4. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x(0)=x_0\neq 0$ est globale.

Exercice 3
Soit l'équation différentielle $x'=\cos(x)+\cos(t)$.

1. Montrer que par tout point $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, il passe une unique solution maximale.

2. Montrer que toute solution maximale est globale.

Exercice 4
Soit l'équation différentielle $x'=t^2+x^3$.

1. Montrer que par tout point $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, il passe une unique solution maximale.

2. Montrer que la solution maximale x du problème de Cauchy $x(0)=x_0>0$, définie sur $]a,b[$, est croissante sur $[0,b[$.

3. Montrer que x n'est pas globale ($b<+\infty$) et que $x(t)\to+\infty$ quand $t\to b^-$.

Exercice 5
On considère l'équation différentielle $x'=t-e^x$.

1. Montrer que par tout point $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$, il passe une unique solution maximale.

2. Montrer que la solution maximale x du problème de Cauchy $x(0)=x_0>0$, définie sur $]a,b[$, est décroissante dans un voisinage de 0, puis croissante.

3. Montrer que $b=+\infty$.

4. Montrer que $a>-\infty$ et que $x(t)\to+\infty$ quand $t\to a^+$.

Exercice 6
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^4}{1+t^2} - x, \\ x(0)=x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale x. On note $]a,b[$ son intervalle de définition.

2. Montrer que si $x_0>0$ (resp. $x_0<0$), alors $x(t)>0$ (resp. $x(t)<0$) pour tout $t\in]a,b[$.

3. Montrer que si $|x_0| < 1$, alors $|x(t)| < 1$ pour tout $t \in [0, b[$ et que $b = +\infty$.

Exercice 7
Résoudre les problèmes et équations suivants :

a) $x' = 2x - 1,\ x(0) = 1$	e) $x' = 2x - x^\alpha,\ \alpha > 1$
b) $x' = tx - x^2,\ x(0) = 1$	f) $x' = x + tx^2$
c) $x' = \dfrac{t^2 - x^2}{2tx}$	g) $x' = e^{t-x}$
d) $x' = 2x + \cos(t)$	h) $(tx' - x)^2 = t^2 - x^2$

Exercice 8
Soit l'équation différentielle $x' = \dfrac{4t^3 x}{t^4 + x^2}$, avec $(t, x) \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Montrer que par tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il passe une et une seule solution maximale.

2. Soit x une solution de l'équation définie sur un intervalle I ne contenant pas 0 et définissons l'application $y(t) := x(t)/t^2$, pour $t \in I$. Déterminer l'équation vérifiée par y, puis la résoudre.

3. Résoudre l'équation de départ.

Exercice 9
On considère l'équation différentielle $x''' = xx''$.

1. Écrire cette équation sous la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ et montrer que par tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^4$, il passe une unique solution maximale.

2. Soit x une solution maximale définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction

$$t \mapsto x''(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right).$$

En déduire que x est soit convexe, soit concave.

3. Déterminer x si $x''(t_0) = 0$.

Exercice 10
Soit l'équation différentielle $xx'' = (x')^2 + 1$.

1. Montrer que pour $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0' \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale x telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

2. On suppose que x est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de t_0 dans un voisinage de x_0. On note $y := x^{-1}$ et $z := x' \circ y$. Calculer z', trouver une équation vérifiée par z et la résoudre.

3. En déduire x.

Exercice 11
Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} x' = y - z, \\ y' = 2x + y + 6z, \\ z' = y - z. \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x' = y - z + e^{2t}, \\ y' = 2x + y + 6z, \\ z' = y - z. \end{cases}$$

Exercice 12
Résoudre l'équation différentielle $x'' + 3x' + 2x = t$.

Exercice 13
Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = y - x. \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y - x. \end{cases}$$

Exercice 14
Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x - z, \\ z' = 4x - 2y - z. \end{cases}$$

Exercice 15
Résoudre le système suivant et tracer son portrait de phase :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Exercice 16
Tracer le portrait de phase et étudier la stabilité des points d'équilibre du système

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 17, \\ y' = 4 - xy. \end{cases}$$

Exercice 17
Écrire sous forme d'un système d'ordre 1 l'équation $\theta'' + (\theta^2 - 1)\theta' + \theta - \theta^3 = 0$. Étudier la stabilité des points d'équilibre et tracer le portrait de phase.

Exercice 18
Étudier la stabilité du point d'équilibre $(0, 0)$ du système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x^2 y - x. \end{cases}$$

Exercice 19
Pour $\omega \neq 0$, tracer le portrait de phase du répulseur harmonique

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \omega^2 x. \end{cases} \quad \text{d'énergie} \quad E(x, y) = \frac{y^2 - \omega^2 x^2}{2}.$$