Examen décembre 2018

Dans tous les exercices, on identifie $\mathbb{C}$ à un plan affine réel P.

Exercice 1. Pour G un groupe, $g \in G$ et $h \in G$, le conjugué de g par h est l'élément $h \cdot g \cdot h^{-1} \in G$.

1. Donner un exemple de bijection affine du plan P qui n'est pas une similitude.
2. Le conjugué d'une translation par une similitude directe est-il une translation ?
3. Montrer que l'ensemble des translations forme un sous-groupe des similitudes directes. Ce sous-groupe est-il distingué ?
4. Le conjugué d'une rotation par une similitude directe est-il une rotation ?

Exercice 2. Soit Sim^+ l'ensemble des similitudes directes.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, montrer que l'ensemble
$$Sim^+_{z_0} = \{\phi \in Sim^+ : \phi(z_0) = z_0\}$$
des similitudes qui fixent z_0 est un sous-groupe de Sim^+.
2. Le sous-groupe $Sim^+_{z_0}$ est-il commutatif ?
3. Soit $z_0 = 0$, le sous-groupe Sim^+_0 est-il un sous-groupe distingué de Sim^+ ?
4. Soit $\phi \in Sim^+$ une similitude directe qui fixe deux points distincts du plan. Que peut-on dire de ϕ ?
5. Soit D la droite du plan d'équation cartésienne $x = 0$. Déterminer l'ensemble
$$Fix(D) = \{\phi \in Sim^+ \ ; \ \phi(D) = D\}$$
des similitudes directes qui stabilisent la droite D. Est-ce un sous-groupe de Sim^+ ?
6. Décomposer l'homographie
$$z \mapsto \frac{2z-1}{z+2}$$
en une composée de transformations géométriques élémentaires (translations, rotations, homothéties, inversion, symmétrie orthogonale).
7. Déterminer les points fixes de l'homographie précédente.

Exercice 3. On se donne les transformations du plan suivantes
$$z \overset{t}{\mapsto} z+2$$
$$z \overset{r}{\mapsto} iz$$

1. Calculer $r^{123}(z)$.
2. Calculer $r \circ t$ et $t \circ r$.
3. Déterminer les images de la droite D d'équation complexe $(1+i)z + (1-i)\overline{z} + 2 = 0$ et du cercle C d'équation complexe $z\overline{z} - z - \overline{z} = 0$ par l'application $r \circ t$.

Exercice 4. *(Isométrie du tétraèdre régulier)*

Notons $\mathcal{T} = ABCD$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$, que l'on fixe. On note G le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^3$ qui laissent $\mathcal{T}$ globalement invariant (i.e. les isométries $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telles que $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$). On va chercher à identifier G.

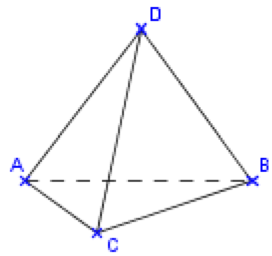

Figure 1: Le tétraèdre régulier $\mathcal{T}$

1. Si l'on considère $\mathcal{T}_0$ un tétraèdre de côté quelconque centré en 0 et G_0 le groupe des isométries positives laissant $\mathcal{T}_0$ globalement invariant, montrer que G et G_0 sont isomorphes.
   Dans la suite, on suppose donc que $\mathcal{T}$ est centré en 0 et de côté 1 et on note G son groupe d'isométries.

2. Montrer que G agit sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des sommets de $\mathcal{T}$ et en déduire qu'il existe un morphisme de groupes
$$\varphi : G \to \mathfrak{S}_4.$$

3. Montrer que G est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$.

4. Montrer que φ est surjectif *(indication : on se rappellera que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ et prendre des réflexions pour les atteindre)*.

5. Montrer que φ est injectif et en déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

6. Considérons G^+ le sous-groupe de G formé des isométries positives. Montrer que $[G : G^+] = 2$.

7. Montrer que, pour tout $n \geq 2$ le seul sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2 est le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$. *(indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$, pour $n \geq 4$).*

8. Conclure que
$$G^+ \simeq \mathfrak{A}_4.$$