Correction de l'examen de décembre 2018

Exercice 1. 1. On sait que toute similitude directe $f : P \to P$ s'écrit $f(z) = az + b$. Il suffit donc par exemple de prendre $f(z) = \overline{z}$ qui est une similitude indirecte (elle renverse l'orientation et ne peut donc pas tre directe) ou encore $f(z) = z + \overline{z}$ qui est affine mais n'est pas une similitude.

2. Prenons une translation $t : z \mapsto z + \tau$ et une similitude directe $s : z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. On calcule

$$\forall z \in \mathbb{C},\ s \circ t \circ s^{-1} = s\left(t\left(\frac{z-b}{a}\right)\right) = s\left(\frac{z-b}{a} + \tau\right) = z - b + a\tau + b = z + a\tau,$$

ce qui est bien l'écriture de la translation de vecteur d'affixe $a\tau$.

3. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de P. Toute translation est une similitude directe (avec $a = 1$) donc $\mathcal{T}$ est bien un sous-ensemble de l'ensemble des similitudes directes. L'application identité est une translation de vecteur nul, donc est dans $\mathcal{T}$. Ensuite, si $t, t' \in \mathcal{T}$ sont deux translations de vecteurs respectifs d'affixes τ et τ', alors on a

$$\forall z \in \mathbb{C},\ t' \circ t^{-1}(z) = t'(z - \tau) = z + \tau' - \tau.$$

Donc $t' \circ t^{-1}$ est la translation de vecteur d'affixe $\tau' - \tau$, donc est dans $\mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T}$ contient l'identité et est stable par composition et passage à l'inverse ; c'est donc bien un sous-groupe du groupe des similitudes directes.
Ensuite, d'après la question précédente, si s est une similitude directe et $t \in \mathcal{T}$, alors $s \circ t \circ s^{-1} \in \mathcal{T}$, ce qui est la définition du fait que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe distingué du groupe des similitudes directes.

4. Soient r la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ et s la similitude directe $s : z \mapsto az + b$. Puisqu'on a $r(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$, on peut écrire

$$\forall z \in \mathbb{C},\ s \circ r \circ s^{-1}(z) = s\left(r\left(\frac{z-b}{a}\right)\right) = s\left(\omega + e^{i\theta}\left(\frac{z-b}{a} - \omega\right)\right)$$

$$= a\omega + e^{i\theta}((z-b) - a\omega) + b = a\omega + b + e^{i\theta}(z - a\omega - b).$$

On reconnaît alors que $s \circ r \circ s^{-1}$ a l'expression de la rotation de centre $s(\Omega)$ et d'angle θ.

Exercice 2. 1. On sait déjà que $Sim^+_{z_0}$ contient l'identité. Ensuite, soient $\phi, \psi \in Sim^+_{z_0}$. Puisque ψ est une bijection, l'équation $\psi(z_0) = z_0$ entraîne $\psi^{-1}(z_0) = z_0$, donc $\phi \circ \psi^{-1}(z_0) = \phi(z_0) = z_0$. De plus, comme $\phi \circ \psi^{-1}$ est une similitude directe, on a $\phi \circ \psi^{-1} \in Sim^+_{z_0}$. Ainsi, $Sim^+_{z_0}$ est un sous-groupe de Sim^+ car il contient le neutre (l'identité) et il est stable par multiplication et passage à l'inverse.

2. Commençons par remarquer que si $f \in Sim^+_{z_0}$ s'écrit $f(z) = az + b$, alors on a

$$f(z_0) = 0 \ \Leftrightarrow\ az_0 + b = z_0 \ \Leftrightarrow\ (1-a)z_0 = b.$$

Ainsi, f s'écrit $f(z) = az + (1-a)z_0 = a(z - z_0) + z_0$. Ensuite, si $f, f' \in Sim^+_{z_0}$ s'écrivent respectivement $f(z) = a(z - z_0) + z_0$ et $f'(z) = a'(z - z_0) + z_0$, alors on a

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f \circ f'(z) = f(a'(z - z_0) + z_0) = a(a'(z - z_0) + z_0 - z_0) + z_0 = aa'(z - z_0) + z_0$$

$$= a'a(z - z_0) + z_0 = a'(a(z - z_0) + z_0 - z_0) + z_0 = f'(a(z - z_0) + z_0) = f' \circ f(z).$$

Ainsi, $f \circ f' = f' \circ f$ et $Sim^+_{z_0}$ est bien abélien.
On pouvait aussi être plus rapide et dire qu'en choisissant un repère affine orthonormé direct de P centré en z_0, on peut identifier $Sim^+_{z_0}$ avec le groupe des applications $\mathbb{C}$-linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, lesquelles forment clairement un groupe abélien.

3. Soient $z_0 = 0$ et $\sigma \in Sim^+_{z_0}$ définie par $\sigma(z) = 2z$. Si on prend $s \in Sim^+$ donnée par $s(z) = z + 1$, alors on a
$$\forall z \in \mathbb{C},\ s \circ \sigma \circ s^{-1}(z) = s(\sigma(z-1)) = s(2(z-1)) = 2z - 2 + 1 = 2z - 1$$
donc $s \circ \sigma \circ s^{-1}(0) = -1 \neq 0$ et donc $s \circ \sigma \circ s^{-1} \notin Sim^+_0$, qui n'est donc pas un sous-groupe distingué de Sim^+.

4. Supposons que ϕ fixe deux points distincts de P, d'affixes z_0 et z_1. Puisque $\phi \in Sim^+_{z_0}$, on a vu dans la question 2. que ϕ devait s'écrire $\phi(z) = a(z - z_0) + z_0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. On a alors
$$z_1 = \phi(z_1) = a(z_1 - z_0) + z_0 \ \Rightarrow\ a(z_1 - z_0) = z_1 - z_0$$
et, puisque $z_0 \neq z_1$, ceci entraîne que $a = 1$, donc que ϕ est l'identité.

5. Soit $\phi \in Fix(D)$. On écrit $\phi : z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On écrit ensuite a et b sous forme algébrique $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point d'affixe $i\lambda$ est dans D, donc le point d'affixe $\phi(i\lambda)$ y est aussi par hypothèse. On calcule
$$a(\lambda i) + b = a_1\lambda i - a_2\lambda + b_1 + b_2 i = b_1 - a_2\lambda + i(b_2 + a_1\lambda)$$
et dire que le point d'affixe ci-dessus est dans D, c'est dire que $b_1 = a_2\lambda$ et ceci doit être vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $\lambda = 1$, on a $a_2 = b_1$ et en prenant $\lambda = 0$, on obtient $b_1 = a_2 = 0$ et donc $a = a_1 \in \mathbb{R}$ et $b = ib_2 \in i\mathbb{R}$. Réciproquement, si $\phi \in Sim^+$ s'écrit $\phi(z) = a_1 z + ib_2$ avec $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$, alors $\phi(D) = D$. Ainsi, l'ensemble $Fix(D)$ est formé des similitudes $\phi : z \mapsto az + ib$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
Ensuite, si $\phi, \psi \in Fix(D)$ s'écrivent $\phi(z) = az + ib$ et $\psi(z) = cz + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a, c \neq 0$, alors on a
$$\phi(\psi(z)) = \phi(cz + id) = a(cz + id) + ib = acz + i(ad + b)$$
et comme $ac \in \mathbb{R}^*$ et $ad + b \in \mathbb{R}$, on a encore bien que $\phi \circ \psi \in Fix(D)$ et comme $\phi^{-1}(z) = \frac{z - ib}{a} = \frac{1}{a}z + i\left(\frac{-b}{a}\right)$, on a aussi $\phi^{-1} \in Fix(D)$. De plus, comme l'identité est clairement dans $Fix(D)$, ce dernier est bien un sous-groupe de Sim^+.
On pouvait aussi dire que si $\phi, \psi \in Fix(D)$, comme ψ est une bijection affine et que $\psi(D) = D$, on a $\psi^{-1}(D) = D$, d'où $\phi \circ \psi^{-1}(D) = \phi(D) = D$, donc $\phi \circ \psi^{-1} \in Fix(D)$.

6. On désigne par h l'homographie considérée et on écrit
$$\forall z \in \widehat{C},\ h(z) = \frac{2z - 1}{z + 2} = 2\frac{z + 2 - \frac{5}{2}}{z + 2} = 2\left(1 - \frac{5/2}{z + 2}\right),$$
donc, en notant t_τ la translation $z \mapsto z + \tau$, $s^\perp_{y=0}$ la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, $\iota_{0,\frac{5}{2}}$ l'inversion de pôle 0 et de rapport $\frac{5}{2}$, μ la rotation de centre 0 et d'angle π et h_2 l'homothétie de centre 0 et de rapport 2, on a
$$h_2 \circ t_1 \circ \mu \circ \iota_{0,\frac{5}{2}} \circ s^\perp_{y=0} \circ t_2(z) = 2(1 - \iota_{0,\frac{5}{2}}(s^\perp_{y=0}(t_2(z))))$$
$$= 2\left(1 - \frac{5/2}{\overline{s^\perp_{y=0}(t_2(z))}}\right) = 2\left(1 - \frac{5/2}{\overline{\overline{t_2(z)}}}\right) = 2\left(1 - \frac{5/2}{z + 2}\right) = \frac{2z - 1}{z + 2} = h(z)$$
et donc
$$h = h_2 \circ t_1 \circ \mu \circ \iota_{0,\frac{5}{2}} \circ s^\perp_{y=0} \circ t_2.$$

7. Soit $z \in \mathbb{C}$ un point fixe de h. On a
$$h(z) = z \ \Leftrightarrow\ \frac{2z - 1}{z + 2} = z \ \Leftrightarrow\ 2z - 1 = z^2 + 2z \ \Leftrightarrow\ z^2 + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ z \in \{\pm i\}.$$
Ainsi, les points fixes de h sont les points d'affixes i et $-i$.

Exercice 3. 1. Puisque $i^4 = 1$, on a

$$\forall z \in \mathbb{C},\ r^{123}(z) = i^{123} \cdot z = i^{4\cdot 30+3} \cdot z = (i^4)^{30} \cdot i^3 \cdot z = i^3 \cdot z = -iz.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$r \circ t(z) = r(z+2) = i(z+2) = iz + 2i$$

et

$$t \circ r(z) = t(iz) = iz + 2.$$

3. Trouvons d'abord des équations cartésiennes de la droite D et du cercle C. Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$, alors on a

$$z \in D \Leftrightarrow (1+i)z + (1-i)\overline{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow (1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

donc une équation cartésienne de D est donnée par $x = y$. Ensuite,

$$z \in C \Leftrightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - iy - x + iy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

donc une équation cartésienne du cercle C (de centre 1 et de rayon 1) est donnée par $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Ensuite, remarquons que $D = D_{0,1+i}$ est la droite passant par 0 et $1+i$, donc $t(D) = D_{2,3+i}$ est la droite passant par 2 et $3+i$ et donc $r(t(D)) = r(D_{2,3+i}) = D_{2i,-1+3i}$ est la droite passant par $2i$ et $-1+3i$. On en déduit que $r \circ t(D)$ est la droite d'équation cartésienne $y + x - 2 = 0$. En écrivant $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ et $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, on obtient alors

$$y + x - 2 = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} + i(z+\overline{z}) - 4i = 0 \Leftrightarrow (1+i)z - (1-i)\overline{z} - 4i = 0 \Leftrightarrow (-1+i)z + (-1-i)\overline{z} + 4 = 0.$$

Ainsi, $r \circ t(D)$ est la droite d'équation complexe $(-1+i)z + (-1-i)\overline{z} + 4 = 0$.
Comme $C = C(1,1)$ est le cercle de centre 1 et de rayon 1, $t(C) = C(3,1)$ est le cercle de centre 3 et de rayon 1 et comme $r = r_{0,\frac{\pi}{2}}$ est la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $r(C(3,1)) = r_{0,\frac{\pi}{2}}(C(3,1)) = C(3i,1)$. Donc $r \circ t(C) = C(3i,1)$ est le cercle de centre le point d'affixe $3i$ et de rayon 1. Une équation cartésienne de ce cercle est donc $x^2 + (y-3)^2 = 1$, ou encore $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$, qui s'écrit donc en complexe

$$z\overline{z} - 6\frac{z-\overline{z}}{2i} + 8 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} + 3i(z-\overline{z}) + 8 = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} + 3iz - 3i\overline{z} + 8 = 0.$$

Ainsi, $r \circ t(C)$ est le cercle d'équation complexe $z\overline{z} + 3iz + \overline{3i}\overline{z} + 8 = 0$.

Exercice 4. 1. Vu l'énoncé, il existe une similitude s qui envoie $\mathcal{T}_0$ sur $\mathcal{T}$. Alors, l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \to & G_0 \\ & & f & \mapsto & s^{-1} \circ f \circ s \end{array}$$

est clairement un isomorphisme de groupes.

2. Soit $f \in G$. Comme f est une isométrie, la distance $f(A)f(B)$ doit être égale à la distance AB, soit 1, la distance maximal entre deux points du tétraèdre. Comme cette distance maximal n'est réalisée que par les sommets du tétraèdre, le segment $[f(A)f(B)]$ doit être une arête de $\mathcal{T}$. Ceci signifie que $f(A)$ et $f(B)$ sont des sommets de $\mathcal{T}$. Le même argument marche pour $f(C)$ et $f(D)$, ce qui montre que f permute les sommets de $\mathcal{T}$. Ceci fournit bien une action de G sur $\{A,B,C,D\}$, de morphisme structurel

$$\varphi : G \to \mathfrak{S}(\{A,B,C,D\}) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

3. Soit $f \in G$. Comme f est affine et permute les sommets de $\mathcal{T}$, elle fixe l'isobarycentre O de $\mathcal{T}$. Ainsi, f fixe l'origine et est donc linéaire, i.e. $f \in GL_3(\mathbb{R})$. Comme c'est une isométrie, on a même $f \in O_3(\mathbb{R})$, et G est donc bien un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$.

4. Considérons M le milieu du segment $[AB]$ et $\mathcal{P}$ le plan contenant le points M et la droite (CD). Alors, la réflexion orthogonale σ par rapport à ce plan fixe les sommets C et D et échange les sommets A et B. De plus, on a clairement $\sigma \in G$. De même, on trouve des éléments de G échangeant deux sommets et fixant les autres. Ces éléments sont envoyés par φ sur les transpositions de $\mathfrak{S}_4$. Comme ces dernières engendrent $\mathfrak{S}_4$ et que $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, on en déduit que $\mathrm{im}(\varphi) = \mathfrak{S}_4$, i.e. φ est surjectif.

5. Soit $f \in G$ tel que $\varphi(f) = id_{\{A,B,C,D\}}$, i.e. f fixe les quatre sommets A, B, C, D. En particulier, f fixe le repère affine (O, A, B, C) de l'espace, donc c'est l'identité et φ est injectif. Donc, c'est un isomorphisme entre G et $\mathfrak{S}_4$.

6. Soit $G^+ \leq G$ le sous-groupe des isométries positives. Dire que l'indice $[G : G^+]$ vaut 2, c'est exactement dire que, pour tout $f \in G$, on a $f^2 \in G^+$. Mais comme, pour tout $f \in G$, on a $\det(f) \in \{\pm 1\}$, on a $\det(f^2) = \det(f)^2 = 1$ et donc f^2 est une isométrie positive, d'où le résultat.

7. Soit $H \leq \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe d'indice 2. Ceci signifie que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma^2 \in H$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un 3-cycle. Alors, σ est d'ordre 3 et $\sigma^{-1} = \sigma^2 \in H$. Or, σ^{-1} est aussi un 3-cycle et donc, H contient tous les 3-cycles. Comme $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, ceci entraîne que $\mathfrak{A}_n \leq H$. Or, comme $\mathfrak{A}_n$ et H sont tous les deux d'indice 2, il ont même ordre et donc $H = \mathfrak{A}_n$, comme souhaité.

8. Ici, on a $G \simeq \mathfrak{S}_4$ et $G^+ \leq G$ est d'indice 2. D'après la question précédente, ceci assure que $G^+ \simeq \mathfrak{A}_4$ et le résultat.