On se donne $m \in \mathbb{N}$ et $m+1$ points distincts $x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m$ d'un intervalle $[a,b]$ fixé, ainsi que des entiers positifs $\alpha_i \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq i \leq m$. Posons $n := m + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i$. Étant donnée une fonction n-fois dérivable sur $[a,b]$, on va construire un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, appelé *polynôme de Hermite généralisé*, vérifiant

$$\forall 0 \leq i \leq m,\ \forall 0 \leq j \leq \alpha_i,\ P_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i).$$

Pour $0 \leq i \leq m$, on pose

$$d_i := i + \sum_{j=0}^{i} \alpha_j,$$

de telle sorte que $d_m = n$ et on introduit $n+1$ réels

$$x_0 = y_0 = y_1 = \ldots = y_{d_0} < x_1 = y_{d_0+1} = \ldots = y_{d_1} < \ldots < x_m = y_{d_{m-1}+1} = \ldots = y_{d_m} = y_n.$$

On introduit également les produits partiels

$$\pi_k(x) := \prod_{i=0}^{k-1} (x - y_i)$$

définis sur $[a,b]$, avec pour convention $\pi_0(x) = 1$. On va chercher à écrire P_n sous la forme

$$P_n(x) = f\{y_0\} + f\{y_0, y_1\}\pi_1(x) + \cdots + f\{y_0, \ldots, y_n\}\pi_n(x),$$

où les $f\{y_0, \ldots, y_k\}$ sont les *différences divisées généralisées*. La terminologie sera justifiée plus bas.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcll} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ & & P & \longmapsto \quad (P(x_0), \ldots, P^{(\alpha_0)}(x_0), P(x_1), \ldots, P^{(\alpha_1)}(x_1), \ldots, P^{(\alpha_m)}(x_m)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire l'existence et l'unicité de P_n.

2. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet de réels $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i.$$

Dans la suite, on posera $P_{-1} := 0$ et $P_k := \sum_{i=0}^{k} a_i \pi_i$ pour tout $0 \leq k \leq n$. On notera également $f\{y_0, \ldots, y_k\} := a_k$.

3. Fixons $0 \leq k \leq n$ et considérons l'entier $0 \leq \ell \leq \alpha_k$ tel que $y_k = y_{k-1} = \ldots = y_{k-\ell} \neq y_{k-\ell-1}$. Montrer que $\pi_k^{(\ell)}(y_k) \neq 0$.

Indication : On pourra commencer par factoriser π_k en $\pi_k(x) = (x - y_k)^\ell q(x)$ avec q un polynôme tel que $q(y_k) \neq 0$, puis utiliser la formule de Leibniz

$$\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ (gh)^{(\ell)} = \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} g^{(p)} h^{(\ell-p)}.$$

4. Avec les mêmes notations que dans la question précédente, prouver que

$$f\{y_0,\ldots,y_k\} = \frac{f^{(\ell)}(y_k) - P_{k-1}^{(\ell)}(y_k)}{\pi_k^{(\ell)}(y_k)}.$$

5. Dans cette question, on souhaite démontrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on a

$$f\{y_{\sigma(0)},\ldots,y_{\sigma(n)}\} = f\{y_0,\ldots,y_n\}.$$

Pour ce faire, on va réécrire le problème en fonction des points (y_k). Plus précisément, on considère l'application

$$\theta : \{0,\ldots,n\} \longrightarrow \{0,\ldots,m\}$$

définie par $\theta(k) = i$ si et seulement si $y_k = x_i$. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est solution du problème

$$\forall 0 \le i \le m,\ \forall 0 \le j \le \alpha_i,\ P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$$

si et seulement s'il est solution du problème

$$\forall 0 \le k \le n,\ \forall 0 \le j \le \beta_k,\ P^{(j)}(y_k) = f^{(j)}(y_k),$$

où $\beta_k := \alpha_{\theta(k)}$. En déduire que P_n est indépendant de l'ordre des (y_k) choisi et conclure.

6. En déduire que l'on a

$$\forall 0 \le k \le n,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1},\ f\{y_{\sigma(0)},\ldots,y_{\sigma(k)}\} = f\{y_0,\ldots,y_k\}.$$

7. Revenant au cas où les (y_p) sont ordonnés, en déduire que pour $1 \le k \le n$ on a

$$f\{y_0,\ldots,y_k\} = \begin{cases} \dfrac{f\{y_1,\ldots,y_k\} - f\{y_0,\ldots,y_{k-1}\}}{y_k - y_0} & \text{si } y_k \neq y_0, \\ \dfrac{f^{(k)}(y_k)}{k!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : On pourra procéder comme dans l'Exercice 1 du TD3.

8. Expliciter $P_n = P_{\alpha_0}$ dans le cas où $m = 0$.

9. Supposons que f est $(n+1)$-fois dérivable et fixons $x \in [a,b]$ distinct des $(x_i)_{i=0}^m$. Trouver un réel $A_x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + A_x \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Prouver que la fonction

$$\phi(t) := f(t) - P_n(t) - A_x \frac{\pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}.$$

s'annule en au-moins $n+2$ points, multiplicités comprises.

10. En déduire que si f est $(n+1)$-dérivable, alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-y_0)\cdots(x-y_n).$$

11. Application : on considère les points $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$ et la fonction $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$. Calculer le polynôme de Hermite P_6 associé.