UPJV 2018-2019

UFR Sciences

Feuille 1

Méthodes et techniques de calcul

† *Domaines de définition*

Exercice I (N1)

a) Calculer les domaine de définition des fonctions suivantes

$f_1(x) = ln(x-4)$, $f_2(x) = \sqrt{2x+1}$, $f_3(x) = \frac{x^2+x-4}{3x-4}$

b) Déterminer le domaine de définition ainsi que le signe des fonctions suivantes

$g_1(x) = x^2 + 3x - 4,$ $g_2(x) = \frac{x+1}{x-1},$ $g_3(x) = sin(x)$

c) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$h_1(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ $h_2(x) = ln(x^2+3x-4),$ $h_3(x) = \frac{1}{x^2+3x-4}$

$h_4(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $h_5(x) = ln(\frac{x+1}{x-1}),$ $h_6(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}$

$h_7(x) = \sqrt{sin(x)},$ $h_8(x) = ln(sin(x)),$ $h_9(x) = \frac{1}{sin(x)}$

Exercice II (N2)

Calculer les domaines de définitions des fonctions définies par les formules suivantes :

$f_1(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6},$ $f_2(x) = \sqrt{x^2-3x+2},$ $f_3(x) = \sqrt{x^2-x+1},$

$f_4(x) = ln(-x^2+1),$ $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x-1}},$ $f_6(x) = \sqrt{3x+2} - \frac{1}{3-x},$

$f_7(x) = \frac{ln(x+2)}{x^2+2x-3},$ $f_8(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}},$

Exercice III (N3) Calculer les domaines de définition des fonctions suivantes

$f_1(x) = \sqrt{\sqrt{16+x^2}-5}.$ $f_2(x) = \frac{x^2}{sin(2x+1)},$ $f_3(x) = ln(cos(x))$

$f_4(x) = \sqrt{x^3-2x^2-x+2},$ $f_5(x) = \sqrt{tg(x)}$

Pour ces trois exercices on écrira les domaines de définition comme des unions d'intervalles disjoints.

† *Limites*

Exercice IV (N1)

Calculer les limites suivantes

$Lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2},$ $Lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+12x+4}$

$Lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+18}{4x^3+x^2+1},$ $Lim_{x\to1^+} \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2-5x+1)}$

$Lim_{x\to+\infty} \sqrt{ln(x)}.(6e^x),$ $Lim_{x\to0^-} (x^3+x-4)sin(x)$

Exercice V (N2)

Calculer les limites suivantes

$Lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, $\quad Lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}$

$Lim_{x\to 0}ln(cosx))$, $\quad Lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}$, $\quad Lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}-1}-\sqrt{x+2}$

† *Domaines de continuité .*

Exercice VI(N1)

Calculer les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes :

1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto f(x) = E(3x+2)$ où E est la fonction partie entière.

2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{x+1}$ si $x \neq -1$ et $g(-1) = 2$.

Exercice VII (N3)

Quels sont les domaines de continuité des fonctions définies par les formules suivantes

1) $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

2) $g(x) = x.sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

† *Théorème des valeurs intermédiaires*

Exercice VIII (N1)

Montrer que l'équation

$$3x+1+sin(x) = 0$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Exercice IX (N2)

Montrer que toutes les équations de degré impair admettent au moins une solution réelle.

Exercice X (N2)

1) Soit f une fonction de $[0,1]$ vers $[0,1]$ continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

2) Donner le tableau des variations de la fonction $x \mapsto h(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$.
Combien de solution l'équation $h(x) = a$ où a est un réel donné admet-elle?
(on discutera selon les valeurs de a)

† *Dérivabilité, domaine de dérivabilité*

Exercice XI (N1)

Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité des fonctions suivantes, donner une expression de leur fonctions dérivées.

$f(x) = 2x^3 + 3x - 4$, $\quad g(x) = ln(x^2+1)$, $\quad h(x) = sin^2(3x+1)$

Exercice XII (N2)
Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, Calculer les expressions des fonctions dérivées :

$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$, $\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$, $\quad f_3(x) = |x^2 - 4x + 3|$,

$f_4(x) = ln(\frac{x-1}{x+2})$, $\quad f_5(x) = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $\quad f_6(x) = sin(\frac{1}{x})$

Exercice XIII (N3)
Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par la formule

$$f(x) = x^2 sin(1/x) \text{ si } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

† *Théorème de Rolle et des accroissements finis*

Exercice XIV(N2)
1) Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.
On suppose que $\forall x \in \mathbf{R}, |f'(x)| \leq a$ où a est un réel donné.
Montrer que $\forall x, t \in \mathbf{R}; |f(x) - f(x+t)| \leq a|t|$

2) Donner (sans utiliser votre calculette) un majorant de l'erreur commise lorsqu'on écrit que $\frac{1}{\sqrt{99}} = 1/10$.

† *Thèmes mélangés*

Exercice XV(N2)
Soit f et g deux fonctions réelles de la variable réelle définies et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, (a et b sont des réels). Montrer qu'il existe au moins un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$(f(a) - f(b)).g'(c) = (g(a) - g(b))f'(c)$$

Application : Vous allez d'Amiens à Marseille en voiture, sans vous arrêter. On suppose la terre plate, Amiens est assimilé à un point ainsi que Marseille, montrer qu'à un moment de votre voyage votre vitesse est parallèle à la droite passant par Amiens et Marseille.
Pensez-vous que le même résultat serait vrai si vous vous déplaciez en avion?

Exercice XVI (N2)
Donner le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer l'expression des fonctions dérivées et donner une équation de la tangente - si elle existe - au point du graphe d'abcsisse a.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $a = -1$ et $a = 4$

2) $g(x) = \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}$, $a = 0$.

Exercice XVII (Applications aux sciences)

1) Une dose $D = 250mg$ d'un médicament est administrée par voie intraveineuse. Ce médicament s'élimine avec un coefficient $k_e = 0,3mg.h^{-1}$, et la quantité présente à l'instant t dans le sang est de la forme $A(t) = De^{-k_e t}$. Sachant que le médicament n'est efficace que si une quantité d'au moins $40mg$ est présente dans le sang, au bout de combien de temps faut-il renouveler l'injection ?

2) Un haut-parleur d'une puissance de Q watts disposé à une distance de R mètre d'un observateur développe une puissance acoustique de $J = Q/(4\pi R^2)W.m^{-2}$. L'intensité d'un son en décibels est donnée par la formule :

$$I = 10log_{10}(\frac{J}{J_0})dB$$

$J_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ est la plus faible puissance audible par un être humain à une fréquence de $1kHz$.

a) La limite de la douleur pour un individu est estimée à 120 dB. Déterminer la distance à laquelle cette limite est atteinte lorsque $Q = 200W$. De même, déterminer la distance à laquelle le son perçu a l'intensité d'un chuchotement (20 dB).

b) Si l'individu est situé à 2 mètres de la source, déterminer la puissance Q nécéssaire pour attiendre la limite de la douleur.