Feuille 1

Exercice I.

a) • Soit la fonction $f_1 : x \mapsto \ln(x-4)$. Pour qu'elle soit définie, il faut et il suffit que ce qui se trouve sous le ln soit strictement positif, i.e. que $x-4>0$, i.e. que $x>4$. Le domaine de définition de f_1 est alors

$$D_{f_1} =]4,+\infty[$$

et on écrit

$$\begin{array}{cccc} f_1 & : &]4,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x-4) \end{array}$$

• Pour que $f_2(x) = \sqrt{2x+1}$ ait un sens, il faut et il suffit que ce qui se trouve sous la racine soit positif ou nul, i.e. que $2x+1 \geq 0$, i.e. que $x \geq -\frac{1}{2}$. Le domaine de définition de f_2 est alors

$$D_{f_2} = \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

• Ici, pour que $f_3(x) = \frac{x^2+x-4}{3x-4}$ soit défini, il ne faut pas que le dénominateur s'annule, il ne faut donc pas que $3x-4=0$, i.e. il ne faut pas que $x=\frac{4}{3}$. Le domaine de définition de f_3 est alors $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$, ou encore

$$D_{f_3} = \left]-\infty,\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{4}{3},+\infty\right[.$$

b) • La définition de g_1 ne pose problème en aucun point, g_1 est donc partout définie. Pour connaître son signe, il faut déterminer ses racines et on saura alors que g_1 est négative entre les racines et positives ailleurs (puisque son coefficient dominant est positif !). Le Δ de g_1 vaut $\Delta = 3^2 - 4*1*(-4) = 25 = 5^2$, donc les racines de g_1 sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Ainsi, g_1 est strictement négative sur $]-4,1[$, strictement positive sur $]-\infty,-4[\cup]1,+\infty[$ et nulle en -4 et 1. Ce que l'on écrit

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4,1] \\ g_1(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-4] \cup [1,+\infty[\end{cases}$$

• La fonction $g_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est définie dès que $x-1 \neq 0$, i.e. dès que $x \neq 1$; son domaine de définition est alors $\mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. De plus, g_1 est positive si le numérateur et le dénominateur ont le même signe. Ils sont tous deux négatifs sur $]-\infty,-1]$ et tous deux positifs sur $]1,+\infty[$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} g_2(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1[\\ g_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

- La définition de $g_3 = \sin$ ne pose problème en aucun point ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, par définition de la fonction sinus, le réel $g_3(x)$ est positif si x est dans l'un des intervalles $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour un entier relatif pair n, ou encore que x soit dans l'un des $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ pour un entier relatif k, ce que l'on écrit

$$g_3(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} \;;\; x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \;\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\; x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

c) - C'est toujours la même méthode : pour que $h_1(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ soit définie, il faut et il suffit que ce qui se trouve sous la racine soit positif au nul, il faut donc que $x^2 + 3x - 4 \geq 0$. En calculant $\Delta = 25$, on trouve que les racines de ce trinôme sont -4 et 1, donc qu'il est positif ou nul sur $]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$ et donc que le domaine de définition de h_1 est

$$D_{h_1} = \mathbb{R} \backslash]-4, 1[=]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[.$$

- Pour que $h_2 = \ln(x^2 + 3x - 4)$ soit défini, il faut et il suffit que ce qui se trouve sous le logarithme soit strictement positif. Avec le calcul précédent (c'est le même trinôme !), on trouve que $x^2 + 3x - 4 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$ et donc

$$D_{h_2} = \mathbb{R} \setminus [-4, 1] =]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[.$$

- Ici, on veut que $x^2 + 3x - 4 \neq 0$ pour pouvoir diviser, i.e. on veut que $x \neq -4$ et $x \neq 1$ et donc

$$D_{h_3} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\} =]-\infty, -4[\cup]-4, 1[\cup]1, +\infty[.$$

- Pour que $h_4(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ soit défini, il faut et il suffit que ce qui se trouve sous la racine soit positif au nul. D'après l'étude de signe de g_2 menée dans la question *b*), il faut que $x \leq -1$ ou que $x > 1$, d'où

$$D_{h_4} = \mathbb{R} \backslash]-1, 1] =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[.$$

- De même que pour h_2, on trouve que $h_5(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est défini sur

$$D_{h_5} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1] =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

- Pour que $h_6(x) = \frac{1}{g_2(x)} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$ soit défini, il faut et il suffit que $g_2(x) \neq 0$, ou encore que $x \neq -1$, d'où

$$D_{h_6} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

- Pour que $h_7(x) = \sqrt{\sin(x)}$ soit défini, il faut et il suffit que $\sin(x) \geq 0$, d'où en utilisant l'étude de signe de g_3 :

$$D_{h_7} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

- Pour que $h_8(x) = \ln(\sin(x))$ soit défini, il faut et il suffit que $\sin(x) > 0$, d'où en utilisant l'étude de signe de g_3 et le fait que sin ne s'annule qu'en les multiples entiers de π :

$$D_{h_8} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

- Pour que $h_9(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ ait un sens, il faut et il suffit que $\sin(x) \neq 0$, ce qui n'arrive que si x est un multiple entier de π, d'où

$$D_{h_9} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[.$$

Exercice II.

On utilise exactement la même méthode que pour l'Exercice I : **Tout ce qui est sous une racine doit être positif ou nul, ce qui est sous un logarithme doit être <u>strictement</u> positif et il ne faut JAMAIS diviser par zéro**. Les réponses sont les suivantes :

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus]1, 2[=]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$D_{f_4} =]-1, 1[$$

$$D_{f_5} = \emptyset$$

$$D_{f_6} = \left[-\tfrac{2}{3}, +\infty\right[\setminus \{3\} = \left[-\tfrac{2}{3}, 3\right[\cup]3, +\infty[$$

$$D_{f_7} =]-2, +\infty[\setminus\{1\} =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$D_{f_8} =]-\infty, -3[\cup \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[$$

Exercice III.

C'est toujours la même méthode, il faut juste se rappeler en plus que **la fonction cosinus est strictement positive sur les $\left]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ impair, que la fonction tangente n'est pas définie sur les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$ et qu'elle est positive ou nulle sur les $\left[l\pi, (l+\frac{1}{2})\pi\right[$ pour $l \in \mathbb{Z}$.**

Par ailleurs, pour f_4, on remarque que 1 est racine de $x^3 - 2x^2 - x + 2$, donc que ce polynôme est divisible par $x-1$ et on obtient, par division euclidienne $x^3-2x^2-x+2 = (x-1)(x^2-x-2)$ et en calculant les racines de x^2-x-2, on trouve que $x^3-2x^2-x+2 = (x-1)(x+1)(x-2)$. Donc, pour que $f_4(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} = \sqrt{(x^2-1)(x-2)}$ soit défini, il faut et il suffit que $(x^2 - 1)(x - 2) \geq 0$, i.e. que $x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty[$.

On obtient alors

$$D_{f_1} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{k\pi-1}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{k\pi-1}{2}, \tfrac{(k+1)\pi-1}{2}\right[$$

$$D_{f_3} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z},\ \text{impair}} \left]\tfrac{k\pi}{2}, \tfrac{(k+2)\pi}{2}\right[= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} \left]\tfrac{(2l+1)\pi}{2}, \tfrac{(2l+3)\pi}{2}\right[$$

$$D_{f_4} = [-1, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$D_{f_5} = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} \left[l\pi, \left(l+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right[$$

Exercice IV.

- C'est une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{-\infty}$. Comme on prend une limite quand $x \to +\infty$, on peut supposer que $x \neq 0$ et que $x > \frac{2}{7}$ (pour que le dénominateur ne s'annule pas) et écrire
$$\forall x > \frac{2}{7},\ \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = \frac{x\left(2x+3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(-7+\frac{2}{x}\right)} = \frac{2x+3-\frac{4}{x}}{-7+\frac{2}{x}}$$
et alors le dernier numérateur tend vers $+\infty$ alors que le dénominateur tend vers -7 et donc la limite recherchée est $-\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = -\infty.$$

- C'est une forme indéterminée du type $\frac{-\infty}{+\infty}$. On peut procéder comme précédemment et écrire que, comme $x^2+12x+4$ a au-plus deux racines réelles, il ne s'annule pas pour x assez négatif et donc
$$\forall x \ll 0,\ \frac{3x+1}{x^2+12x+4} = \frac{3+\frac{1}{x}}{x+12+\frac{4}{x}}.$$
Ce dernier numérateur tend vers 3 alors que le dénominateur tend vers $-\infty$, donc la limite recherchée est nulle :
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+12x+4} = 0.$$

- De même, comme $4x^3+x^2+1$ a au-plus trois racines réelles, on a
$$\forall x \gg 0,\ \frac{3x^3+18}{4x^3+x^2+1} = \frac{3+\frac{18}{x^3}}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}},$$
le numérateur tend donc vers 3 et le dénominateur vers 4, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+18}{4x^3+x^2+1} = \frac{3}{4}.$$

- Ici, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur tend vers 0^-, donc la limite est $-\infty$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2-5x+1)} = -\infty.$$

- Ici, $\sqrt{\ln(x)}$ ainsi que $6e^x$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} (6e^x)\sqrt{\ln(x)} = +\infty.$$

- On a que x^3+x-4 tend vers -4 quand x tend vers 0^-, alors que $\sin(x)$ lui, tend vers 0. La limite est donc nulle :

$$\lim_{x\to 0^-} (x^3+x-4)\sin(x) = 0.$$

Exercice V.

Il s'agit ici d'utiliser l'expression conjuguée pour lever les formes indéterminées.

- On a

$$\begin{aligned}\forall x\geq 1,\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

  Or, cette dernière quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0.$$

- On a

$$\begin{aligned}\forall x\geq 1,\ \sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{x-1-(x^2+1)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2+x-2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{-x+1-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.\end{aligned}$$

  Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur tend lui vers 1, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1} = -\infty.$$

- Le cosinus tend vers 1 en 0 et le logarithme tend vers 0 en 1, d'où

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos(x)) = 0.$$

- C'est quasiment du cours :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

- On a
$$\forall x \gg 0,\ \sqrt{x+\sqrt{x}-1}-\sqrt{x+2} = \frac{x+\sqrt{x}-1-x-2}{\sqrt{x+\sqrt{x}-1}+\sqrt{x+2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+\sqrt{x}-1}+\sqrt{x+2}} = \frac{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}.$$
Le numérateur tend vers 1 tandis que le dénominateur tend vers 2 ; la limite est donc $\frac{1}{2}$:
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}-1}-\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice VI.

1) La fonction f, comme la partie entière E, est partout définie :
$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & E(3x+2) \end{array}$$
On sait (cours !) que la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$, donc ici f est continue si $3x+2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$, i.e. si $3x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$, i.e. si $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right[$, d'où
$$DC(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right[.$$

2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et on a
$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 2 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$
Ainsi, g est partout définie :
$$\begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 2 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases} \end{array}$$
Ensuite, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Reste à voir si elle est continue en -1. On a
$$\lim_{x\to-1^-} g(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{1+x} = -\infty \neq 2 = g(-1)$$
(en fait, g n'a même pas de limite en -1), donc g n'est pas continue en -1 et donc
$$DC(g) = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Exercice VII.

1) Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Comme $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Mais f n'admet pas de limite en 0, donc n'est pas continue en 0 et donc

$$DC(f) = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

2) Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|,$$

donc on a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = g(0),$$

et donc g est continue partout :

$$DC(g) = \mathbb{R}.$$

Exercice VIII.

La fonction $x \mapsto f(x) := 3x + 1 + \sin(x)$ est définie et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et on a

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\frac{3\pi}{2} < 0,$$

donc, par définition de la limite, il existe $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $f(x_0) < 0$ et de même, comme

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 > 0,$$

il existe $x_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $f(x_1) > 0$. De plus, toujours par définition de la limite, on peut supposer que $x_0 < x_1$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $y \in]x_0, x_1[$ tel que $f(y) = 0$, autrement dit

$$3y + 1 + \sin(y) = 0,$$

d'où le résultat.

Exercice IX.

Considérons une équation polynômiale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $a_n \neq 0$ et de degré impair, i.e. avec n impair. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $a_n > 0$. Alors, comme n est impair on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty.$$

Ainsi, par définition de la limite, il existe $x_0 < 0$ tel que $f(x_0) < 0$ ainsi que $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) > 0$. Comme f est polynômiale, elle est continue et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $y \in]x_0, x_1[$ tel que $f(y) = 0$ et ce y répond alors à la question.

Exercice X.

1) Posons

$$\begin{array}{rccc} g & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, g est aussi continue sur $[0,1]$ et, puisque $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, on a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 < 0$; donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.
Bonus : En fait, la conclusion reste vraie quelles que soient les valeurs de f en 0 et 1, pouvez-vous trouver pourquoi ?

2) Soit

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3 + 2x^2 - 7x + 1 \end{array}$$

La fonction h étant polynômiale, elle est partout définie, continue et dérivable et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 3x^2 + 4x - 7.$$

La dérivée h' est un trinôme de discriminant $\Delta = 16 + 84 = 100 = 10^2$ et de racines $\frac{-4-\sqrt{\Delta}}{2*3} = \frac{-4-10}{6} = -\frac{7}{3}$ et $\frac{-4+\sqrt{\Delta}}{2*3} = \frac{-4+10}{6} = 1$. Le coefficient dominant de h' étant positif, h' est positive à l'extérieur de ses racines et négative entre ses racines. De plus, on calcule $h\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{419}{27} \approx 15,52$ et $h(1) = -3$. On obtient alors le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{419}{27}$	↘	-3	↗	$+\infty$

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que

$$\text{l'équation } h(x) = a \text{ admet} \begin{cases} \text{une solution} & \text{si} \quad a < -3 \text{ ou } a > \frac{419}{27} \\ \text{deux solutions} & \text{si} \quad a = -3 \text{ ou } a = \frac{419}{27} \\ \text{trois solutions} & \text{si} \quad -3 < a < \frac{419}{27} \end{cases}$$

Exercice XI.

- La fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 3x - 4$ est polynômiale, donc est partout définie, continue et dérivable :
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$
De plus, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^2 + 3.$$
- La fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est définie dès que $x^2 + 1 > 0$, i.e. est partout définie. Elle est de plus continue et dérivable partout où elle est définie en tant que composée de fonctions continues et dérivables, donc est partout continue et dérivable :
$$D_g = DC(g) = D_{g'} = \mathbb{R}.$$
De plus, en utilisant la formule de dérivation de fonction composée
$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$
on obtient (en posant $u(x) := \ln(x)$ et $v(x) := x^2 + 1$) que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (u \circ v)'(x) = (u' \circ v)(x)v'(x) = \frac{1}{x^2+1} \times 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$
- La fonction $h : x \mapsto \sin^2(3x + 1)$ est partout définie, continue et dérivable comme combinaison linéaire, composée et produit de fonctions continues et dérivables :
$$D_h = DC(h) = D_{h'} = \mathbb{R}.$$
Posons $a : x \mapsto \sin(3x + 1)$. Alors on a $h = a^2$ et en posant $u(x) := x^2$ et $v(x) := a(x)$, la même formule que ci-dessus donne
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = (u \circ v)'(x) = 2a(x)a'(x).$$
Or, en utilisant encore la même formule avec $\widetilde{u}(x) := \sin(x)$ et $\widetilde{v}(x) := 3x + 1$, il vient
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a'(x) = (\widetilde{u} \circ \widetilde{v})'(x) = 3\cos(3x + 1)$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2a(x)a'(x) = 2\sin(3x + 1) * (3\cos(3x + 1) = 6\cos(3x + 1)\sin(3x + 1).$$

Exercice XII.

On rappelle que $x \mapsto \sqrt{x}$ **est définie et continue dès que** $x \geq 0$ **et est dérivable dès que** $x > 0$**. On rappelle également que** $\ln$ **est défini, continu et dérivable dès que** $x > 0$ **et enfin que** $x \mapsto |x| = \sqrt{x^2}$ **est partout définie et continue, et est dérivable dès que** $x \neq 0$.

- La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2-6x+8}$ est définie et continue dès que $x^2-6x+8 \geq 0$ et est dérivable dès que $x^2-6x+8 > 0$. On vérifie que les racines de x^2-6x+8 sont 2 et 4. Comme le coefficient dominant de ce polynôme est positif, on a que $x^2-6x+8 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$ et $x^2-6x+8 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$. Ainsi, on obtient

$$D_{f_1} = DC(f_1) =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$$

et

$$D_{f_1'} =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[.$$

De plus, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées (appliquée à $u(x) := \sqrt{x}$ et $v(x) := x^2-6x+8$ et en se rappelant que $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x > 0$), on obtient

$$\forall x \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[,\ f_1'(x) = (u \circ v)'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}.$$

- La fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ est définie et continue dès que $\frac{x-1}{x+3}$ existe et est positife ou nul et est dérivable dès que $\frac{x-1}{x+3}$ est défini et strictement positif. On obtient alors

$$D_{f_2} = DC(f_2) =]-\infty, -3[\cup[1, +\infty[$$

et

$$D_{f_2'} =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[.$$

En posant $a(x) := \sqrt{x}$ et $b(x) := \frac{x-1}{x+3}$, la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\forall x \in D_{f_2'},\ f_2'(x) = a'(b(x))b'(x) = \frac{b'(x)}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}}.$$

Pour trouver b', il nous faut ici appliquer la formule de dérivation des quotients :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

en posant $u(x) := x-1$ et $v(x) := x+3$. On obtient alors

$$\forall x \in D_{b'},\ b'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x+3-(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

et donc

$$\forall x \in D_{f_2'},\ f_2'(x) = \frac{b'(x)}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}} = \frac{4}{2(x+3)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}} = \frac{2\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x-1}} = \frac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$$

- La fonction $f_3 : x \mapsto |x^2-4x+3|$ est partout définie et continue comme composée de fonctions continues. Elle est de plus dérivable dès que $x^2-4x+3 \neq 0$. En trouvant les racines de ce trinôme, de discriminant $\Delta = 4$, on obtient que $x^2-4x+3 = 0$ si et seulement si $x \in \{1, 3\}$. Ainsi, on obtient

$$D_{f_3} = DC(f_3) = \mathbb{R}$$

et

$$D_{f_3'} = \mathbb{R} \setminus \{1,3\} =]-\infty, 1[\cup]1,3[\cup]3,+\infty[.$$

Avec la formule $\text{abs}(x) := |x| = \sqrt{x^2}$, on trouve que

$$\forall x \neq 0,\ \text{abs}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées à $u(x) := \text{abs}(x) = |x|$ et $v(x) := x^2 - 4x + 3$, on trouve que

$$\forall x \in D_{f_3'},\ f_3'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x^2 - 4x + 3 > 0 \\ -2x+4 & \text{si} \quad x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\forall x \in D_{f_3'},\ f_3'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 1[\cup]3,+\infty[\\ -2x+4 & \text{si} \quad x \in]1,3[\end{cases}$$

- La fonction $f_4 : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est définie, continue et dérivable partout où elle est définie, comme composée de fonctions continues et dérivables. De plus, elle est définie dès que $\frac{x-1}{x+2} > 0$, i.e. dès que $x \in]-\infty, -2[\cup]1,+\infty[$, d'où

$$D_{f_4} = DC(f_4) = D_{f_4'} =]-\infty, -2[\cup]1,+\infty[.$$

En posant $a(x) := \ln(x)$ et $b(x) := \frac{x-1}{x+2}$, la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\forall x \in D_{f_4'},\ f_4'(x) = (a \circ b)'(x) = a'(b(x))b'(x) = \frac{b'(x)}{b(x)} = \frac{x+2}{x-1}b'(x).$$

Et en posant $u(x) := x - 1$ et $v(x) := x + 2$, la formule de dérivation des quotients donne

$$\forall x \neq -2,\ b'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

et donc

$$\forall x \in D_{f_4'},\ f_4'(x) = \frac{x+2}{x-1}b'(x) = \frac{x+2}{x-1}\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

- La fonction $f_5 : x \mapsto e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$ est définie, continue et dérivable partout où la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ l'est. Cette dernière est définie et continue partout où $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ et est dérivable dès que $x^2 - 3x + 2 > 0$. En calculant les racines de $x^2 - 3x + 2$, qui sont 1 et 2, on trouve que $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, 1] \cup [2,+\infty[$ et que $x^2 - 3x + 2 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, 1[\cup]2,+\infty[$. Ainsi, on obtient

$$D_{f_5} = DC(f_5) =]-\infty, 1] \cup [2,+\infty[$$

et

$$D_{f_5'} =]-\infty, 1[\cup]2,+\infty[.$$

En posant $a(x) := e^x$ et $b(x) := \sqrt{x^2-3x+2}$, on obtient que

$$\forall x \in D_{f_5'}, f_5'(x) = (a \circ b)'(x) = a'(b(x))b'(x) = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}b'(x).$$

De même, en posant $\widetilde{a}(x) := \sqrt{x}$ et $\widetilde{b}(x) := x^2 - 3x + 2$, on obtient

$$\forall x \in D_{f_5'},\ b'(x) = (\widetilde{a} \circ \widetilde{b})'(x) = \widetilde{a}'(\widetilde{b}(x))\widetilde{b}'(x) = \frac{\widetilde{b}'(x)}{2\sqrt{\widetilde{b}(x)}} = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

On obtient donc finalement

$$\forall x \in D_{f_5'},\ f_5'(x) = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}b'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}e^{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

- La fonction $f_6 : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est définie, continue et dérivable partout où la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est, donc dès que $x \neq 0$. Ainsi, on a

$$D_{f_6} = DC(f_6) = D_{f_6'} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

De plus, en posant $a(x) := \sin(x)$ et $b(x) := \frac{1}{x}$, on obtient

$$\forall x \neq 0,\ f_6'(x) = (a \circ b)'(x) = a'(b(x))b'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) b'(x).$$

Or, on a

$$\forall x \neq 0,\ b'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_6'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}.$$

Exercice XIII.

Soit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue et dérivable au-moins sur $\mathbb{R}^*$. De plus, en appliquant la formule de dérivée d'un produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

à $u(x) := x^2$ et $v(x) := \sin\frac{1}{x}$ et en utilisant le calcul de f_6' dans l'exercice précédent, on obtient

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il reste donc à voir si f est continue et dérivable en 0. On a

$$\forall x \neq 0,\ \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2,$$

donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

donc f est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ? On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0,$$

donc $f'(0)$ existe et vaut 0. La fonction f est donc dérivable en 0. Finalement, on obtient

$$D_f=DC(f)=D_{f'}=\mathbb{R}$$

et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si}\quad x\neq 0\\ 0 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$$

Remarquons au passage que si l'on avait commencé par montrer que f est dérivable en 0, sa continuité en 0 aurait été automatique !

Exercice XIV.

1) Soient $x,t\in\mathbb{R}$. Supposons $t>0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_1\in]x,x+t[$ tel que

$$f(x+t)-f(x)=f'(c_1)(x+t-x)=f'(c_1)t,$$

d'où

$$|f(x+t)-f(x)|\leq|f'(c_1)||t|\leq a|t|.$$

Supposons maintenant $t<0$. Toujours par le théorème des accroissements finis, il existe $c_2\in]x+t,x[$ tel que

$$f(x)-f(x+t)=f'(c_2)|t|,$$

d'où

$$|f(x+t)-f(x)|\leq|f'(c_2)||t|\leq a|t|.$$

Enfin, si $t=0$ le résultat est évident. Dans tous les cas, on obtient

$$\forall x,t\in\mathbb{R},\ |f(x+t)-f(x)|\leq a|t|.$$

2) C'est astucieux ici ! Il ne faut pas prendre $f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ mais $f:x\mapsto\sqrt{x}$ et se restreindre à l'intervalle $[\sqrt{99},10]$. L'idée est d'écrire que si $\varepsilon>0$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{10}\leq\varepsilon\ \Leftrightarrow\ 10-\sqrt{99}\leq 10\sqrt{99}\varepsilon.$$

Sur $[\sqrt{99},10]$, la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$ est continue et elle est dérivable sur $]\sqrt{99},10[$ avec

$$\forall x\in]\sqrt{99},10[,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ainsi, on a par décroissance de f' :

$$\forall x\in]\sqrt{99},10[,\ |f'(x)|\leq|f'(\sqrt{99})|=\frac{1}{2\sqrt{99}}.$$

Par ce qu'on a montré dans la question 1) (inégalité des accroissements finis), on obtient que

$$10-\sqrt{99}=|10-\sqrt{99}|\leq \frac{1}{2\sqrt{99}}|100-99|=\frac{1}{2\sqrt{99}},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{10}\leq \frac{1}{10\sqrt{99}}\frac{1}{2\sqrt{99}}=\frac{1}{2*10*99}=\frac{1}{1980}.$$

Ainsi, un majorant de l'erreur commise en écrivant que $\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{1980}\approx 5,05\times 10^{-4}$. Remarquons que l'on a $\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{10}\approx 5,038\times 10^{-4}<5,05\times 10^{-4}$.

Exercice XV.

- Posons

$$\begin{array}{cccc}\varphi & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (f(a)-f(b))g(x)-(g(a)-g(b))f(x)\end{array}$$

La fonction φ est définie et continue sur $[a,b]$ car f et g le sont et est dérivable sur $]a,b[$ car f et g le sont. De plus, on a

$$\varphi(a)=(f(a)-f(b))g(a)-(g(a)-g(b))f(a)=-f(b)g(a)+f(a)g(b)$$

et

$$\varphi(b)=(f(a)-f(b))g(b)-(g(a)-g(b))f(b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)=\varphi(a),$$

donc φ vérifie les hypothèse du théorème de Rolle et on en déduit qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or, on a

$$\forall x\in]a,b[,\ \varphi'(x)=(f(a)-f(b))g'(x)-(g(a)-g(b))f'(x),$$

donc $c\in]a,b[$ vérifie $(f(a)-f(b))g'(c)-(g(a)-g(b))f'(c)=0$, soit

$$(f(a)-f(b))g'(c)=(g(a)-g(b))f'(c),$$

d'où le résultat.

- Pour l'application, on représente la situation par la figure suivante : Soit f la fonction représentant le chemin suivi par le voyageur (en vert sur la figure) et soit g la ligne droite d'Amiens à Marseille (en violet sur la figure). La direction Amiens-Marseille est donnée par la constante $g'(x)$ et par la première question, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=g'(c)\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}.$$

et comme $f'(c)$ représente la vitesse au point c, en posant $k:=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$, on obtient

$$f'(c)=kg'(c),$$

i.e. la vitesse en c est parallèle à la direction Amiens-Marseille. Ce résultat peut aussi se voir en "redressant" la direction Amiens-Marseille par rotation, puis en appliquant directement le théorème de Rolle.
Évidemment, pour ce qui est du voyage en avion, le résultat n'est plus vrai puisque la trajectoire n'est plus plane et on ne peut plus appliquer les résultats de l'analyse réelle.

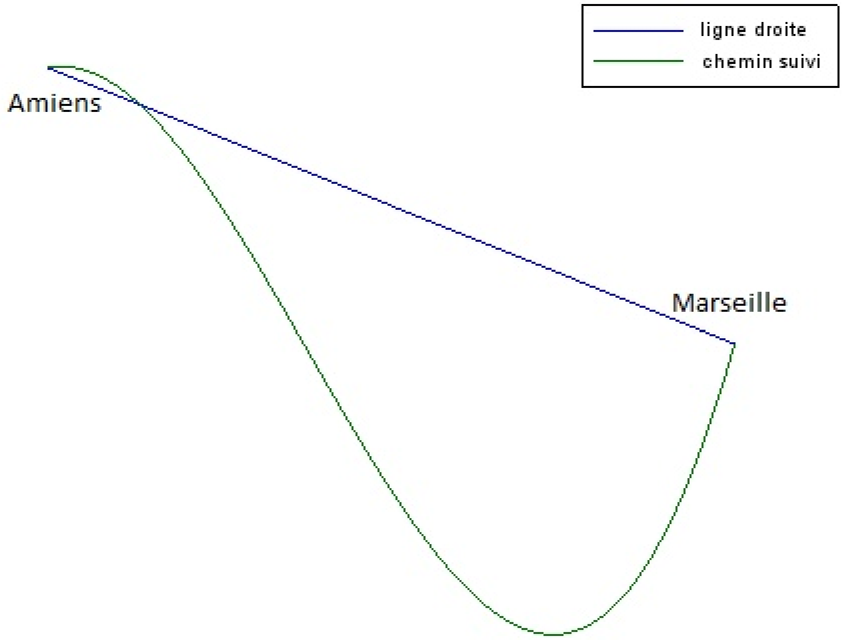

FIGURE 0.1 – Amiens-Marseille

Exercice XVI.

1) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Cette fonction est dérivable dès que $x^2 - 2x - 3 > 0$ et en calculant les racines de $x^2 - 2x - 3$, on trouve que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$ et est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1, donc la tangente cherchée n'existe pas.
2) Soit $g : x \mapsto \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}$. La fonction g est définie et continue et dérivable dès que $x+1 > 0$, i.e. dès que $x > -1$. Les formules de dérivation de fonctions composées et de quotient donnent alors

$$\forall x > -1,\ g'(x) = \frac{(6x+1)\sqrt{x+1} - \frac{3x^2+x-1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{6x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{3x^2+x-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

On a donc

$$g(a) = g(0) = -1 \text{ et } g'(a) = g'(0) = \frac{3}{2}.$$

L'équation de la tangente à la courbe de g en a est en outre

$$T : g'(a)(x-a) + g(a),$$

donc ici,

$$T : \frac{3}{2}x - 1.$$

Exercice XVII.

1) Le médicament n'est efficace au temps t que si on a $A(t) \geq 40$, ce qui donne

$$A(t) \geq 40 \;\Leftrightarrow\; De^{-k_e t} \geq 40 \;\Leftrightarrow\; -k_e t \geq \ln \frac{40}{250} \;\Leftrightarrow\; t \leq \frac{\ln \frac{40}{250}}{-k_e} = -\frac{\ln \frac{4}{25}}{k_e} = \frac{\ln(6,25)}{0.3}.$$

Il faut donc renouveler l'injection au bout de $\frac{\ln(6.25)}{0.3} \approx 6,11$ heures.

2) a) On a

$$I \geq 120 \;\Leftrightarrow\; 10 \log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right) \geq 120 \;\Leftrightarrow\; \frac{J}{J_0} \geq 10^{12} \;\Leftrightarrow\; J \geq 1,$$

ce qui arrive si et seulement si

$$\frac{200}{4\pi R^2} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; R \geq \sqrt{\frac{200}{4\pi}},$$

i.e. si et seulement si

$$R \leq \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 4m.$$

Ensuite, on a

$$I = 20 \;\Leftrightarrow\; \log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right) = 2 \;\Leftrightarrow\; J = 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{200}{4\pi R^2} = 10^{-10} \;\Leftrightarrow\; R = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \times 10^6 \approx 400km.$$

b) On a ici

$$I \geq 120 \;\Leftrightarrow\; \log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right) \geq 12 \;\Leftrightarrow\; J \geq 1$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{Q}{4\pi R^2} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; Q \geq 4\pi R^2 = 16\pi \approx 50.27W.$$