UPJV 2018-2019

UFR Sciences

Feuille 2

METHODES ET TECHNIQUES DE CALCUL

† *Fonctions polynômes et fractions rationnelles*

Exercice I (N1)

Soit la fonction polynômiale

$$f(x) = 3 + 2x^3 + x$$

quel est son degré? que valent les coefficients de degré 0, 1, 2, 3, ... ?
Quel est son domaine de définition? de continuité? de dérivabilité? donner l'expression de $f'(x)$ constater que f' est encore une fonction polynômiale quel est son degré?
Pouvez-vous proposer une formule donnant le degré de la fonction dérivée d'une fonction polynômiale de degré n?

Exercice II (N1)

Calculer les domaines de définition, de continuité, de dérivabilité et donner l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 4$

2) $g(x) = \frac{x^3+3x-1}{x^2-5x+6}$

Exercice III (N2)

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ où a est un réel donné.

1) Quel sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f?

2) Calculer (si elle existe) l'expression de la fonction dérivée.

3) Donner les tableaux des variations de f dans les cas où $a \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, $a = -\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}$ et $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

† *Fonctions logarithmes et exponentielles*

Exercice IV (N1)

1) Calculer $ln(e^{\pi}), e^{ln(\pi)}, e^{(1/2)ln(3)+ln(5)}, (1/3)ln(e^{\pi+2})$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $2ln(x) + ln(6) = 0$ et $ln(x) + ln(x+1) = 1$

3) Résoudre les inégalités $ln(3x) > ln(x^2 - 1)$ et $e^{3x} \geq e^{x^2-x+2}$.

Exercice V (N1)

Pour un entier naturel n et un réel strictement positif x on a $x^n = e^{nln(x)}$

Pour tout réel a et tout réel positif x on pose

$$x^a = e^{aln(x)}$$

Soit $0 < a < b$ deux réels fixé. Montrer que

Si $x \in]0, 1[$ alors $x^b < x^a$ et que si $x \in]1, +\infty[$ alors $x^b > x^a$.

Exercice VI (N2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$3^x + 3^{-x} = 2$, $\quad 3^{2x} - 2.3^x + 1 = 0$

$log_x(2) = -3$, $\quad 2^{ln(x)} = 8$

Exercice VII(N2)

Simplifier les expressions suivantes

$log_3(\sqrt[5]{27}), 2log_5(4) - (1/2)log_5(64) - log_5(2)$.

† *Fonctions hyperboliques*

Exercice VIII (N2)

Soit f une fonction réelle de la variable réelle.

1) Montrer que, en toutes circonstances, le domaine de définition des fonctions Pf et If définies par les formules

$$Pf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } If(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont symétriques par rapport à 0 , que Pf est une fonction paire et If une fonction impaire.

2) On suppose que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, Montrer que Pf et If sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et calculer leur fonctions dérivées. Que remarquez-vous?

3) Identifier les fonctions Pf et If dans le cas où f est la fonction exponentielle.

Exercice IX (N2)

En utilisant les formules $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Montrer que $2sh(x)ch(x) = sh(2x)$ et $ch^2(x) + sh^2(x) = ch(2x)$

Exercice X (N2)

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = ch(x) - 3sh(x)$

1) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement une solution α.

2) Montrer que α satisfait $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 2 = 0$. Trouver α.

3) Trouver le point d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses.

Exercice XI (N3)

Montrer que pour tout réel x on a $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

Exprimer $5ch^2(x) + 3sh^2(x)$ à l'"aide exclusivement de $ch(x)$.

Résoudre l'équation $5ch^2(x) + 3sh^2(x) = a$ où a est un réel donné

† *Bijections, bijections réciproques*

Exercice XII(N2)

Déterminer si les fonctions suivantes sont des bijections. Dans le cas où la fonction est une bijection calculer la bijection réciproque.
$f_1 : [0,1] \to [0,1]; x \mapsto f_1(x) = 1 - x$; $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}; x \mapsto f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
$f_3 : [-1,1] \to [0,1]; x \mapsto f_3(x) = 1 - x^2$; $f_4 : [0,1] \to [0,1]; x \mapsto f_4(x) = 1 - x^2$.

Exercice XIII (N3)

1) Montrer que la fonction $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.
2) On notera $Argsh$ sa bijection réciproque. Montrer que $Argsh$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer l'expression de sa dérivée.
3) Donner l'allure du graphe de $Argsh$

Exercice XIV (N3)

1) La fonction $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est elle bijective?
2) Montrer que $ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bijective.
3) On note $Argch$ la bijection réciproque de la fonction de la question 2). Quel est son domaine de dérivabilité? Calculer l'expression de sa fonction dérivée.

Exercice XV (N3)

Soit $f(x) = ax + sin(x)$ où a est un réel donné.
1) Donner le domaine de dérivabilité et calculer la fonction dérivée de f.
2) Donner une condition nécéssaire et suffisante sur a pour que f soit strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que si $a = 2$, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers lui-même.
Que pouvez -vous dire des variations de la bijection réciproque ? (on ne calculera pas d'expression pour la bijection réciproque).

† *Fonctions circulaires réciproques*

Exercice XVI (N2)

Calculer
$Arcsin(sin(19\pi/3))$, $sin(Arcsin(1/3))$, $tg(Arctg(\pi/4))$
$cos(Arctg(x))$ et $tg(Arccos(x))$.

Exercice XVII (N2)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $tg(x) = \sqrt{3}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Arctg(2x) + Arctg(x) = \pi/4$

Exercice XVIII(N3)

Montrer que si a et b sont des réels tels que $ab < 1$ alors

$$Arctg(a) + Arctg(b) = Arctg(\frac{a+b}{1-ab})$$

Calculer

$$2arctg(1/13) + Arctg(1/7) + 2Arctg(1/4)$$

† *Pratique du calcul de dérivée*

Exercice XIX(N2)

Calculer les domaines de définition, de continuité de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes
$f_1(x) = \sqrt{Arctg(x)}$, $f_2(x) = Arctg(ln(x))$, $f_3(x) = \frac{ln(x)}{x}$,
$f_4(x) = sin(x)Arcsin(x)$, $f_5(x) = ln(2Artg(3x))$, $f_6(x) = sin^2(Arccos(x^2))$

Exercice XX (N3)

1)a) Calculer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction

$$f(x) = Argsh(x) - ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

b) Que pouvez-vous en déduire?
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$