Feuille 2

Exercice I.

- La fonction polynômiale
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 + x + 3 \end{array}$$
est de degré 3 et son coefficient de degré 0 (respectivement 1, 2, 3) vaut 3 (respectivement 1, 0, 2).
- En tant que fonction polynômiale, f est partout définie, continue et dérivable :
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$
- On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^2 + 1,$$
c'est encore une fonction polynômiale de degré 2, soit le degré de f moins un.
- De façon générale, supposons qu'on ait une fonction polynômiale
$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$
de degré n (i.e. $a_n \neq 0$). On calcule
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 = \sum_{i=2}^{n} ia_i x^{i-1}.$$
On constate alors que P' est de degré $n-1$. Ainsi, pour toute fonction polynômiale Q, on a la formule
$$\deg Q' = \deg Q - 1.$$

Exercice II.

1) La fonction $f : x \mapsto 3x^4 + 2x^2 - 4$ est polynômiale, donc est partout définie, continue et dérivable :
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}$$
et on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 12x^3 + 4x.$$

2) La fonction $g : x \mapsto \frac{x^3+3x-1}{x^2-5x+6}$ est définie dès que $x^2-5x+6 \neq 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1$ et ses racines valent 2 et 3. Ainsi, g est définie sur $]-\infty, 2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$. De plus, elle est continue et dérivable sur D_g en tant que quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, d'où

$$D_g = DC(g) = D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{2,3\} =]-\infty,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[.$$

En posant $u(x) := x^3+3x-1$ et $v(x) := x^2-5x+6$, la formule de dérivation des quotients donne

$$\forall x \in D_{g'},\ g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(3x^2+3)(x^2-5x+6)-(x^3+3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{3x^4-15x^3+18x^2+3x^2-15x+18-2x^4-6x^2+2x+5x^3+15x-5}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$= \frac{x^4-10x^3+15x^2+2x+13}{(x^2-5x+6)^2}.$$

Exercice III.

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3+ax^2+x+1 \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

1) Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est polynômiale, donc est partout définie, continue et dérivable :
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$

2) On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2+2ax+1.$$

3) • Supposons que $a \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$. Dans ce cas, le discriminant de f' vaut $\Delta = 4a^2-12 > 0$. Les deux racines réelles de f' sont donc
$$x_1 := \frac{-2a-2\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{6} = \frac{-a-\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{3}$$
et
$$x_2 := \frac{-2a+2\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{6} = \frac{-a+\sqrt{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}}{3}.$$
Comme le coefficient dominant de f' est positif, f' est positive à l'extérieur de ses racines et négative à l'intérieur. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Supposons que $a \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Dans ce cas on a $\Delta = 4a^2 - 12 < 0$ et f' n'a aucune racine réelle. De plus, f' est toujours strictement positive (car f' a le signe de $f'(0) = 1 > 0$), d'où le tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- Supposons que $a = -\sqrt{3}$. Dans ce cas on a $\Delta = 4a^2 - 12 = 0$ et la seule racine réelle de f' vaut $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et f' est positive ou nulle. Ainsi, le tableau de variations de f s'écrit

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{9} + 1$	$\nearrow$	$+\infty$

- Supposons enfin que $a = \sqrt{3}$. Dans ce cas on a aussi $\Delta = 4a^2 - 12 = 0$ et la seule racine réelle de f' est $\frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice IV.

1) - Par définition du logarithme népérien, on a

$$\ln(e^{\pi}) = \pi,$$

- Toujours par définition de ln, on a

$$e^{\ln(\pi)} = \pi.$$

- On calcule
$$e^{\frac{\ln 3}{2}+\ln 5} = e^{\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)} \times e^{\ln 5} = e^{\ln(\sqrt{3})} \times e^{\ln 5} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}.$$
- On a directement
$$\frac{1}{3}\ln(e^{\pi+2}) = \frac{1}{3} \times (\pi+2) = \frac{\pi+2}{3}.$$

2) - On passe à l'exponentielle (on a le droit, car exp est partout définie !) et on obtient
$$2\ln x+\ln 6 = 0 \;\Rightarrow\; e^{2\ln x+\ln 6} = 1 \;\Rightarrow\; e^{\ln(6x^2)} = 1 \;\Rightarrow\; 6x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$
et, comme ln n'est défini que pour les réels strictement positifs, la seule solution possible est $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Réciproquement, on a
$$2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \ln 6 = \ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln 6 = -\ln 6 + \ln 6 = 0$$
et donc l'équation $2\ln x + \ln 6 = 0$ admet une unique solution donnée par
$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

*Ce type de raisonnement est très utilisé en Mathématiques et s'appelle l'**analyse-synthèse**. On suppose que l'on a une solution à notre problème et on en déduit certaines de ses propriétés ; c'est l'**analyse**. Quand on a assez avancé pour trouver une solution, on prend ce candidat et on vérifie qu'il répond à la question ; c'est la **synthèse**. Dans le cas où l'on aboutirait à une contradiction, cela veut dire qu'il n'existe pas de solution au problème posé.*

- On raisonne encore ici par analyse-synthèse. En passant encore à l'exponentielle, on a (pour une éventuelle solution x)
$$\ln(x) + \ln(x+1) = 1 \;\Rightarrow\; \ln(x(x+1)) = 1 \;\Rightarrow\; x(x+1) = e \;\Rightarrow\; x^2 + x - e = 0.$$
Le discriminant de ce dernier polynôme vaut $\Delta = 1 + 4e$ et la seule racine positive de ce polynôme est $x = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$. La seule solution possible est donc $x = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$. Réciproquement, on calcule
$$\ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\right) + \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \times \frac{1+\sqrt{1+4e}}{2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1+4e-1}{4}\right) = \ln(e) = 1,$$
donc l'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = 1$ admet une unique solution donnée par
$$x = \frac{\sqrt{1+4e}-1}{2}.$$

3) • On raisonne toujours par analyse-synthèse. Si x est solution de l'inéquation, alors

$$\ln(3x) > \ln(x^2-1) \;\Rightarrow\; 3x > x^2-1 \;\Rightarrow\; x^2-3x-1<0.$$

Ce dernier trinôme est de discriminant $\Delta = 13$ et ses racines sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ainsi, pour que $x^2-3x-1<0$, il faut et il suffit que $x \in \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. Or, pour que $\ln(3x)$ et $\ln(x^2-1)$ aient un sens, il faut que $x>0$ et $|x|>1$; il faut donc que $x>1$. Ainsi, il faut que $x \in \left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. Réciproquement, si $x \in \left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$, on vérifie que l'on a bien $\ln(3x) > \ln(x^2-1)$ et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est

$$\left]1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right].$$

• On a

$$e^{3x} \geq e^{x^2-x-2} \;\Rightarrow\; 3x \geq x^2-x-2 \;\Rightarrow\; x^2-4x-2 \leq 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 24$ et ses racines réelles valent $x_1 = \frac{4-2\sqrt{6}}{2} = 2-\sqrt{6}$ et $x_2 = \frac{4+2\sqrt{6}}{2} = 2+\sqrt{6}$. Ici, la définition des deux membres de l'inéquation ne pose problème en aucun réel et on vérifie que si $2-\sqrt{6} \leq x \leq 2+\sqrt{6}$, alors on a bien $e^{3x} \geq e^{x^2-x-2}$ et donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est

$$[2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}].$$

Exercice V.

Soient donc $0<a<b$ deux réels fixés.

- Supposons que $x \in]0,1[$. Alors on a $\ln(x)<0$ et alors, comme a et b sont positifs :

$$b\ln x < a \ln x$$

et, par croissance de l'exponentielle, on obtient

$$x^b = e^{b\ln x} < e^{a \ln x} = x^a.$$

- Supposons que $x \in]1,+\infty[$. Alors $\ln(x)>0$ et, comme a et b sons positifs :

$$a\ln x < b\ln x$$

et, par croissance de l'exponentielle,

$$x^a = e^{a\ln x} < e^{b\ln x} = x^b,$$

d'où le résultat.

Exercice VI.

- Remarquons tout d'abord que cette équation a un sens quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En la multipliant par $3^x = e^{x\ln 3}$, on obtient

$$3^x + 3^{-x} = 2 \;\Rightarrow\; 3^{2x} - 2 \times 3^x + 1 = 0.$$

Posons alors $X := 3^x$. On doit avoir $X^2 - 2X + 1 = 0$ et comme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, on doit donc avoir $X = 1$, soit $3^x = 1$, soit $e^{x\ln 3} = e^0$, soit $x \ln 3 = 0$, donc $x = 0$. Réciproquement, $x = 0$ vérifie clairement $3^x + 3^{-x} = 2$, donc cette équation admet pour unique solution

$$x = 0.$$

- L'équation $3^{2x} - 2.3^x + 1 = 0$ vient d'être résolue et sa seule solution est

$$x = 0.$$

- Ici, on a deux façons (quasiment identiques !) de résoudre le problème. On peut utiliser la définition de $\log_x$ ou bien utiliser la formule utile

$$\forall a > 0,\ \forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Par définition de $\log_x$, on a

$$\log_x(2) = -3 \;\Rightarrow\; x^{-3} = 2 \;\Rightarrow\; x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Autrement,

$$\log_x(2) = -3 \;\Rightarrow\; \frac{\ln 2}{\ln x} = -3 \;\Rightarrow\; \ln x = -\frac{\ln 2}{3} = \ln\left(2^{-\frac{1}{3}}\right) \;\Rightarrow\; x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Réciproquement, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ vérifie bien l'équation, qui admet donc pour unique solution

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

- On a

$$2^{\ln x} = 8 \;\Rightarrow\; \ln x = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3 \;\Rightarrow\; x = e^3$$

et e^3 vérifie clairement l'équation, qui admet donc pour unique solution

$$x = e^3.$$

Exercice VII.

- On écrit
$$\log_3\left(\sqrt[5]{27}\right) = \log_3\left(27^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\log_3(27) = \frac{1}{5}\log_3(3^3) = \frac{3}{5},$$
d'o'ù
$$\log_3(\sqrt[5]{27}) = \frac{3}{5}.$$
- On écrit
$$\begin{aligned} &2\log_5(4) - \frac{1}{2}\log_5(64) - \log_5(2) \\ &= \log_5(4^2) - \log_5(\sqrt{64}) - \log_5(2) \\ &= \log_5(16) - \log_5(8) - \log_5(2) = \log_5\left(\frac{16/8}{2}\right) = \log_5(1) = 0, \end{aligned}$$
d'où
$$2\log_5(4) - \frac{1}{2}\log_5(64) - \log_5(2) = 0.$$

Exercice VIII.

Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) On note D_f le domaine de définition de f. Pour que $Pf(x)$ et $If(x)$ soient définies, il faut et il suffit que $f(x)$ et $f(-x)$ soient définies, i.e. que $x \in D_f$ et $-x \in D_f$, i.e. que $x \in D_f$ et $x \in -D_f$, i.e. que $x \in D_f \cap (-D_f)$. Ainsi, on a
$$D_{Pf} = D_{If} = D_f \cap (-D_f)$$
et ceci est bien symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire qu'il contient un réel si et seulement s'il contient son opposé). De plus, on a
$$\forall x \in D_f \cap (-D_f),\ Pf(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = Pf(x)$$
et
$$\forall x \in D_f \cap (-D_f),\ If(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -If(x),$$
donc Pf est paire et If est impaire.
Remarquons que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $f = Pf + If$ et de plus, une fonction à la fois paire et impaire doit être nulle. On dit alors que "l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle est somme directe du sous-espace des fonctions paires et du sous-espace des fonctions impaires". Ce vocabulaire deviendra clair à ceux qui suivront l'UE d'algèbre linéaire du second semestre, mais n'est d'aucune utilité ici, ni pour l'examen.

2) Si l'on suppose que $D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}$, alors on a

$$D_{Pf} = DC(Pf) = D_{(Pf)'} = \mathbb{R} \cap (-\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

et de même

$$D_{If} = DC(If) = D_{(If)'} = \mathbb{R}.$$

De plus, on calcule que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (Pf)'(x) = \frac{f'(x) - f'(-x)}{2} = I(f')$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (If)'(x) = \frac{f'(x) + f'(-x)}{2} = P(f').$$

Remarquons que le fait que $f = Pf + If$ permet d'économiser le calcul de l'une des dérivées ci-dessus. En effet, si l'on sait par exemple que $(Pf)' = I(f')$, comme la relation $f = Pf + If$ entraîne $f' = (Pf)' + (If)' = I(f') + (If)'$ et comme on doit avoir $f' = P(f') + I(f')$, la soustraction de ces deux dernières égalités donne $0 = P(f') - (If)'$, soit $(If)' = P(f')$.

3) Si $f = \exp$, alors on a par définition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Pf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{ch}(x),$$

ainsi que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ If(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{sh}(x).$$

On retrouve alors le fait que ch est paire, que sh est impaire, que $\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \exp$ et que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Exercice IX.

- On calcule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x).$$

- On calcule aussi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x).$$

Exercice X.

Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{ch}(x) - 3\mathrm{sh}(x) \end{array}$$

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{sh}(x) - 3\mathrm{ch}(x).$$

Cherchons les points où f' s'annule. On écrit

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ e^x - e^{-x} = 3(e^x + e^{-x}) \ \Rightarrow\ e^x + 2e^{-x} = 0 \ \Rightarrow\ e^{2x} = -2$$

ce qui est impossible puisque l'exponentielle est toujours strictement positive. Ainsi, f' ne s'annule jamais et est donc de signe constant. Or, $f'(0) = \mathrm{sh}(0) - 3\mathrm{ch}(0) = -3 < 0$, donc f' est toujours strictement négative et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto f(x)+1$ est aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est s'annule donc en au-plus un point. Donc, s'il existe α tel que $f(\alpha) + 1 = 0$, alors ce α est unique. Par ailleurs, on a

$$f(0) + 1 = 2 > 0 \ \text{ et } \ f(1) + 1 = \frac{e + e^{-1}}{2} - 3\frac{e - e^{-1}}{2} + 1 = -e + \frac{2}{e} + 1 \approx -0.98 < 0$$

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires (qu'il est licite d'appliquer ici puisque f est continue), il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) + 1 = 0$, i.e. $f(\alpha) = -1$ et on a vu que ce α est unique.

2) Soit donc α tel que $f(\alpha) = -1$. On a

$$0 = f(\alpha) + 1 = \mathrm{ch}(\alpha) - 3\mathrm{sh}(\alpha) + 1 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} - 3\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} + 1 = -e^\alpha + 2e^{-\alpha} + 1,$$

on doit donc avoir, en multipliant par $-e^\alpha$:

$$e^{2\alpha} - 2 - e^\alpha = 0,$$

d'où, en posant $X := e^\alpha$,

$$X^2 - X - 2 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 9$ et ses racines sont $X_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Or, comme $X = e^\alpha$, la seule racine qui nous intéresse est la racine positive $X_2 = 2$ et comme $e^\alpha = 2$, on a $\alpha = \ln 2$. On sait que $\alpha = \ln 2$ est solution puisque c'est le seul candidat et qu'on a montré qu'il existait une solution. Ainsi, on a

$$\alpha = \ln 2.$$

3) L'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(\beta, 0)$ avec $f(\beta) = 0$. Le même raisonnement que dans la question 1) montre qu'un tel β existe et est unique. Déterminons-le. On a

$$f(\beta) = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{ch}(\beta) - 3\mathrm{sh}(\beta) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} - 3\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\ -e^\beta + 2e^{-\beta} = 0 \ \Rightarrow\ e^{2\beta} = 2 \ \Rightarrow\ \beta = \frac{\ln 2}{2},$$

donc le point d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses a pour coordonnées

$$(\beta, 0) = \left(\frac{\ln 2}{2}, 0\right).$$

Exercice XI.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = 1.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$5\operatorname{ch}(x)^2 + 3\operatorname{sh}(x)^2 = 2\operatorname{ch}(x)^2 + 3(\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2) \overset{\text{IX}}{=} 2\operatorname{ch}(x)^2 + 3\operatorname{ch}(2x)$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2} + 3\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2(e^x + e^{-x})^2 - 3 = 2(e^{2x} + e^{-2x}) + 1 = 4\operatorname{ch}(2x) + 1.$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On calcule, á l'aide de la question précédente

$$5\operatorname{ch}(x)^2 + 3\operatorname{sh}(x)^2 = a \;\Rightarrow\; 4\operatorname{ch}(2x) + 1 = a \;\Rightarrow\; \operatorname{ch}(2x) = \frac{a-1}{4} \;\Rightarrow\; e^{2x} + e^{-2x} = \frac{a-1}{2}.$$

Puis, en multipliant ceci par e^{2x}, on obtient

$$e^{4x} + \frac{1-a}{2}e^{2x} + 1 = 0.$$

Posons $X := e^{2x}$, l'équation devient

$$X^2 + \frac{1-a}{2}X + 1 = 0.$$

Il s'agit d'un trinôme de discriminant $\Delta = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 4 = \frac{(1-a)^2}{4} - 4 = \frac{1}{4}((1-a)^2 - 16)$. Ce trinôme ne peut avoir de racines réelles que si $\Delta \geq 0$, i.e. si $|1-a| \geq 4$, i.e. si $a \in]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$. Si $a \in \{-3, 5\}$, alors $\Delta = 0$ et la seule racine du trinôme est $\frac{a-1}{4}$ et on n'est intéressé que par la racine positive car $e^{2x} = X > 0$. Or, si $a = -3$, on a $X = -1 < 0$, donc la seule racine qui nous intéresse alors est $X = 1$, donc $x = 0$. D'autre part, si $a \in]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et la racine réelle positive du trinôme est $X = \frac{\frac{a-1}{2} + \sqrt{\frac{(1-a)^2}{4} - 4}}{2} = \frac{a-1+\sqrt{(1-a)^2-16}}{4}$. On a donc

$$e^{2x} = \frac{a-1+\sqrt{(1-a)^2-16}}{4} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1+\sqrt{(1-a)^2-16}}{4}\right)$$

et cette formule est valable, qu'on ait $a \in]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ ou qu'on ait $a = 5$. Ainsi, L'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'équation $5\operatorname{ch}(x)^2 + 3\operatorname{sh}(x)^2 = a$ admet au-moins une solution est donné par

$$a \in]-\infty, -3[\cup[5, +\infty[$$

et, dans ce cas, l'équation admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1+\sqrt{(1-a)^2-16}}{4}\right).$$

Exercice XII.

- Soit
$$\begin{array}{rccc} f_1 & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & 1-x \end{array}$$
Soit $x \in [0,1]$ et soit $y = f_1(x) = 1-x$. Alors, on a $x = 1-y$, d'où
$$\forall x, y \in [0,1],\ y = 1-x \ \Leftrightarrow\ x = 1-y.$$
Ainsi, f_1 est bijective et on a
$$\begin{array}{rccc} f_1^{-1} & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & y & \mapsto & 1-y \end{array}$$
i.e. f_1 est son propre inverse. On dit que f_1 est une involution de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
- Soit
$$\begin{array}{rccc} f_2 & : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & & x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ et soit $y = f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. On a
$$y = \frac{x+1}{x-1} \ \Rightarrow\ y(x-1) = x+1 \ \Rightarrow\ yx - y = x+1 \ \Rightarrow\ yx - x = 1+y$$
$$\Rightarrow\ x(y-1) = y+1 \ \Rightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1}.$$
Réciproquement, on voit que si $x = \frac{y+1}{y-1}$, alors on a bien $y = \frac{x+1}{x-1}$. Ainsi, on a
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ y = \frac{x+1}{x-1} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1}.$$
On en déduit que f_2 est bijective et que sa bijection réciproque est donnée par
$$\begin{array}{rccc} f_2^{-1} & : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & & y & \mapsto & \frac{y+1}{y-1} \end{array}$$
Là encore, on a $f_2^{-1} = f_2$ et f_2 est donc une involution.
Pour montrer que f_1 et f_2 sont des involutions, il aurait suffit de montrer que $f_1 \circ f_1 = id_{[0,1]}$ et que $f_2 \circ f_2 = id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$. Pourquoi ?
- Soit
$$\begin{array}{rccc} f_3 & : & [-1,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$$
On a
$$f_3(-1) = 0 = f_3(1),$$
donc f_3 n'est pas injective, elle n'est donc *a fortiori* pas bijective.

- Soit

$$f_4 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$$

La fonction f_4 est dérivable sur $[0,1]$, et on a

$$\forall x \in [0,1],\ f_4'(x) = -2x < 0,$$

donc f_4 est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc est injective et comme $f_4(0) = 1$ et $f_4(1) = 0$, son image est $[0,1]$, donc elle est aussi surjective, donc elle est bijective. Calculons sa réciproque. Si $x \in [0,1]$ et $y = f_4(x) = 1 - x^2$, alors on a $x = \pm\sqrt{1-y}$ et comme x doit être positif, on doit avoir $x = \sqrt{1-y}$ et dans ce cas, $x \in [0,1]$. On a donc

$$\forall x, y \in [0,1],\ y = 1 - x^2 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt{1-y}.$$

Ainsi, f_4 est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$f_4^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \sqrt{1-y} \end{array}$$

Exercice XIII.

1) La fonction sh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ est on a vu dans l'éxercice VIII, question 3) que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction sh est strictement croissante, donc est injective et comme on a

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty,$$

elle est aussi surjective. Ainsi, la fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective et surjective : elle est bijective.

2) D'après le cours, comme la fonction $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ ne s'annule jamais, la réciproque argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, en dérivant la relation $\mathrm{sh} \circ \mathrm{argsh} = id_{\mathbb{R}}$, on obtient $\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}) \times \mathrm{argsh}' = 1$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}.$$

Or, on a la relation

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(z)^2 - \mathrm{sh}(z)^2 = 1,$$

d'où, avec $z = \mathrm{argsh}(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))^2 - x^2 = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{x^2+1} \quad (\text{car ch} > 0)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{argsh}'(x) > 0$, donc la fonction argsh est strictement croissante et comme sh est impaire, il en va de même pour argsh. De plus, comme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$, on a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\operatorname{argsh}(y)}{y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

On a donc une branche parabolique de direction O_x en $+\infty$. De même, on a une branche parabolique de direction O_x en $-\infty$. Par ailleurs, on a $\operatorname{argsh}(0) = 0$ et $\operatorname{argsh}'(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(0))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(0)} = 1$ et donc l'équation de la tangente en 0 est $T_0 : y = x$. On en déduit l'allure du graphe de argsh :

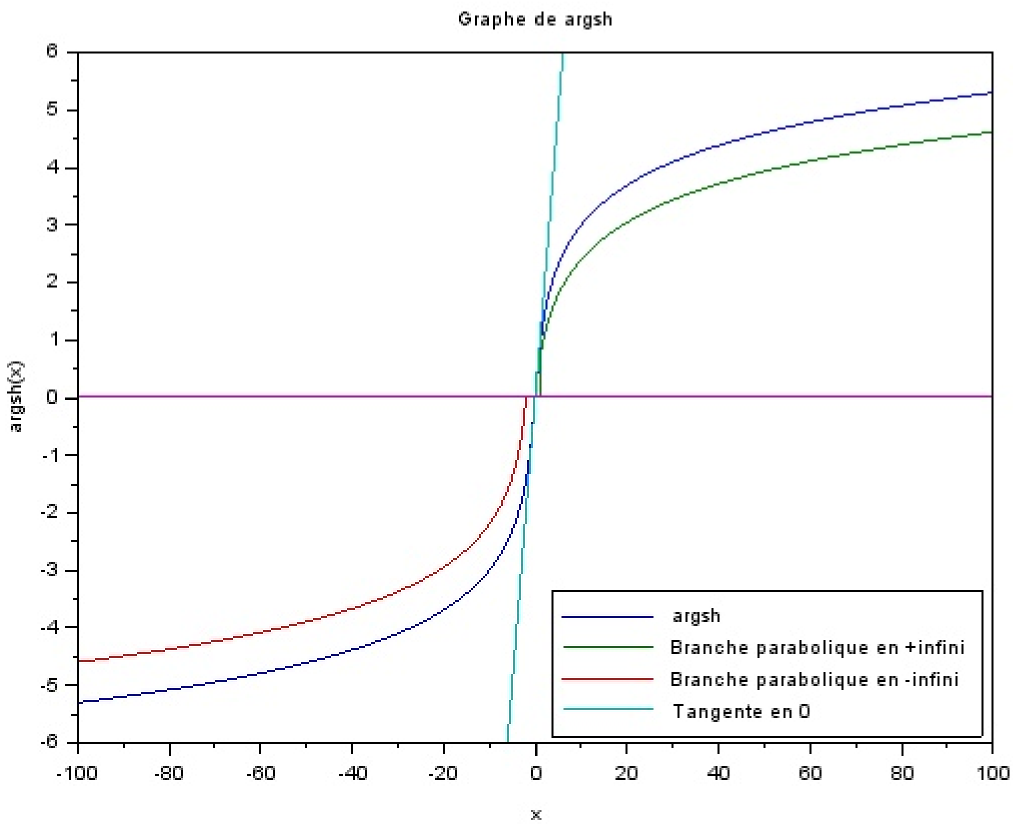

FIGURE 0.1 – Allure du graphe de argsh

Exercice XIV.

1) On a

$$\operatorname{ch}(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} = \operatorname{ch}(-1).$$

La fonction $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est donc pas injective, donc n'est pas bijective.
En fait, aucune fonction paire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne peut être injective !

2) On a

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) > 0,$$

donc la fonction ch : $]0,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante, donc injective et comme $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{ch}(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, la fonction ch :$]0,+\infty[\to]1,+\infty[$ est bijective et comme $\mathrm{ch}(0) = 1$, il en est de même de la fonction ch : $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$.

3) Comme on a

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) > 0 \ \text{ et } \ \mathrm{sh}(0) = 0,$$

la fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a, en dérivant la relation $\mathrm{ch} \circ \mathrm{argch} = id_{]1,+\infty[}$,

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}.$$

La relation $\mathrm{ch}(z)^2 - \mathrm{sh}(z)^2 = 1$, valable pour tout réel z, entraîne en posant $z = \mathrm{argch}(x)$:

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ x^2 - \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = x^2 - 1$$

et, comme $\mathrm{argch}(x) > 0$ pour $x > 1$, on en tire que

$$\forall x > 1,\ \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

et donc

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice XV.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et définissons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax + \sin(x) \end{array}$$

1) Comme les fonctions $x \mapsto ax$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont partout dérivable, f est partout dérivable :

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}.$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a + \cos(x).$$

2) La fonction f est strictement croissante si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e. si et seulement si $a + \cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e. si et seulement si $a > 1$. De même, la fonction f est strictement décroissante si et seulement si $a < -1$. On en déduit que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $|a| > 1$, i.e. si et seulement si

$$a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

3) Si $a = 2$, alors f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (en fait, elle est strictement croissante) par ce qu'on vient de montrer, donc elle est injective. Par ailleurs, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sin(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, puisque $\sin(x) \in [-1,1]$ pour tout x, donc f est aussi surjective et donc définit bien une bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ensuite, puisque $f'(x) = 2 + \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée f' ne s'annule jamais et dériver la relation $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))} = \frac{1}{2 + \cos(f(x))}$$

et comme, pour tout x on a $2+\cos(f(x)) \in [1, 3]$, on a que $(f^{-1})(x)' > 0$ pour tout réel x, donc f^{-1} est aussi strictement croissante.
Là aussi, c'est un fait général : la réciproque d'une fonction strictement monotone φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone, de même monotonie que φ. Pouvez-vous le montrer ?

Exercice XVI.

- Attention ! On doit avoir $\arcsin(x) \in [-1, 1]$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, comme $\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3 \times (2\pi) + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on a

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

- Ici, comme $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$, on a directement

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

- On a encore directement

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

- Là, c'est un petit peu plus subtile. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a

$$x = \tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))},$$

d'où, pour $x \neq 0$, la formule $\sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x))$. Cette formule est encore valable pour $x = 0$ et on obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x)).$$

D'autre part, on a toujours $\cos(\arctan(x))^2 + \sin(\arctan(x))^2 = 1$ et en remplaçant $\sin(\arctan(x))$ par $x\cos(\arctan(x))$ dans cette identité, il vient

$$\cos(\arctan(x))^2 + x^2\cos(\arctan(x))^2 = 1,$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Or, puisque $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout réel x, on a $\cos(\arctan(x)) > 0$ pour tout x et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que l'expression $\tan(\arccos(x))$ ait un sens, il faut que $x \in [-1,1]$ et $x \neq 0$. On obtient

$$\forall x \in [-1,0[\cup]0,1],\ \tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \frac{\sin(\arccos(x))}{x}.$$

De plus, on a

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\},\ \sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1 \ \Rightarrow\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

et donc

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\},\ \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$

Exercice XVII.

1) Comme la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une bijection, de réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\tan x = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ \arctan(\tan(x)) = \arctan(\sqrt{3}) \ \Rightarrow\ x = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

ceci est vrai pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ et comme $\tan(a+\pi) = \tan(a)$ pour tout a en lequel tan est définie, les solutions réelles de l'équation sont

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2) C'est difficile ! Bravo à vous si vous y êtes arrivé !
Rappelons tout d'abord les relations de trigonométrie (à connaître par cœur !) :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{cases}$$

En général, les autres formules de trigonométrie s'en déduisent. En particulier si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors on a $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$ et $\cos(a+b) \neq 0$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(b)(\sin(a) + \tan(b)\cos(a))}{\cos(b)(\cos(a) - \tan(b)\sin(a))} \\ &= \frac{\sin(a) + \tan(b)\cos(a)}{\cos(a) - \tan(b)\sin(a)} = \frac{\cos(a)(\tan(a) + \tan(b))}{\cos(a)(1 - \tan(a)\tan(b))} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ ;\ a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Revenons maintenant à l'équation $\arctan(2x)+\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$. En passant à la tangente, on obtient

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

et en utilisant la formule montrée juste avant, il vient

$$\frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(x))} = 1$$

ou encore

$$1 = \frac{2x + x}{1 - 2x \times x} = \frac{3x}{1 - 2x^2}.$$

On cherche donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $1-2x^2 = 3x$, i.e. $2x^2+3x-1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 17$ et ses racines sont $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < -\frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (en fait, on a $x_1 \approx -1.78$ et $x_2 \approx 0.28$). Or, comme $x_1 < -\frac{\pi}{2}$, on a $\arctan(2x_1) < 0$ et $\arctan(x_1) < 0$. En effet, $\tan(\arctan(x_1)) = x_1 < 0$ et la fonction tan envoie les réels positifs (resp. négatifs) de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur des réels positifs (resp. négatifs). Ainsi, $\arctan(2x_1) + \arctan(x_1)$ est strictement négatif et ne peut donc valoir $\frac{\pi}{4}$. Finalement, si l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une solution, alors elle est unique et donnée par

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}.$$

Il reste à montrer que x_2 est solution. Il suffit pour cela de montrer que l'équation admet au-moins une solution, car on saura alors que ça ne peut être que x_2 et on aura gagné ! La fonction $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2}$ qui est strictement positive. Donc la fonction $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$ est strictement croissante, vaut $\arctan(2)+\arctan(1)-\frac{\pi}{4} = \arctan(2) > 0$ en 1 et $\arctan(0) + \arctan(0) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} < 0$ en 0, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(2x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4} = 0$. Ce x ne peut alors être que x_2.
En faisant les comptes, on obtient au final que l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \in]0, 1[.$$

Exercice XVIII.

- Ceci découle de la formule démontrée dans l'exercice précédent :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ x, y, x + y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Soient donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$. Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x, y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\tan(x) = a$ et $\tan(y) = b$ et ce car $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une bijection. De plus, comme $ab < 1$, on a $\tan(x)\tan(y) < 1$ et donc $x + y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ car la formule $\tan(x + y)(1 - \tan(x)\tan(y)) = \tan(x) + \tan(y)$ implique que $\tan(x + y)$ est un réel bien défini et on peut donc appliquer la formule pour obtenir

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{a + b}{1 - ab}.$$

En passant à l'arctangente, il vient alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = x + y = \arctan(\tan(x+y)) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right),$$

d'où le résultat.

- On va bien-sûr utiliser le théorème fondamental de l'exercice de Mathématiques et appliquer la formule ci-dessus !

$$2\arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{4} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{13}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{13}\frac{1}{13}}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{2}{13}}{1-\frac{1}{169}}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{2}{13}\frac{169}{168}\right) + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\left(\frac{1}{2}\frac{16}{15}\right) = \arctan\frac{26}{168} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{8}{5}$$

$$= \arctan\frac{13}{84} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{8}{15} = \arctan\left(\frac{\frac{13}{84}+\frac{1}{7}}{1-\frac{13}{84}\frac{1}{7}}\right) + \arctan\frac{8}{15}$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{25}{84}}{1-\frac{13}{588}}\right) + \arctan\frac{8}{15} = \arctan\left(\frac{25}{84}\frac{588}{575}\right) + \arctan\frac{8}{15}$$

$$= \arctan\left(7\times\frac{25}{575}\right) + \arctan\frac{8}{15} = \arctan\frac{7}{23} + \arctan\frac{8}{15}$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{7}{23}+\frac{8}{15}}{1-\frac{7}{23}\frac{8}{15}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{289}{345}}{1-\frac{56}{345}}\right) = \arctan\left(\frac{289}{345}\frac{345}{289}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice XIX.

- La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{\arctan(x)}$ est définie et continue dès que $\arctan(x) \geq 0$ et est dérivable dès que $\arctan(x) > 0$. On en déduit que

$$D_{f_1} = DC(f_1) = [0, +\infty[$$

et

$$D_{f'} =]0, +\infty[.$$

De plus, la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\forall x > 0,\ f_1'(x) = \frac{\arctan'(x)}{2\sqrt{\arctan(x)}} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{\arctan(x)}}.$$

- La fonction $f_2 : x \mapsto \arctan(\ln(x))$ est définie, continue et dérivable dès que ln l'est, i.e.

$$D_{f_2} = DC(f_2) = D_{f_2'} =]0, +\infty[.$$

Là aussi, c'est la formule de dérivation des fonctions composées qui nous donne

$$\forall x > 0,\ f_2'(x) = \frac{\ln'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}.$$

- La fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie, continue est dérivable dès que ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ le sont, i.e.
$$D_{f_3} = DC(f_3) = D_{f_3'} =]0, +\infty[.$$
De plus, par la formule de dérivation d'un quotient, on obtient
$$\forall x > 0,\ f_3'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- La fonction $f_4 : x \mapsto (\sin x)(\arcsin x)$ est définie, continue et dérivable dès que arcsin l'est, d'où
$$D_{f_4} = DC(f_4) = [-1, 1]$$
et
$$D_{f_4'} =]-1, 1[.$$
De plus, la formule de dérivation d'un produit donne
$$\forall x \in]-1, 1[,\ f_4'(x) = (\cos x)(\arcsin x) + \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- La fonction $f_5 : x \mapsto \ln(2 \arctan(3x))$ est définie, continue et dérivable dès que $\arctan(3x) >$, i.e. dès que $x > 0$ et donc
$$D_{f_5} = DC(f_5) = D_{f_5'} =]0, +\infty[.$$
Ensuite, par le formule de dérivation des fonctions composée, on obtient
$$\forall x > 0,\ f_5'(x) = \frac{\frac{2 \times 3}{(3x)^2 + 1}}{2 \arctan(3x)} = \frac{3}{(9x^2 + 1)(\arctan(3x))}.$$

- Enfin, la fonction $f_6 : x \mapsto \sin^2(\arccos(x^2))$ est définie, continue et dérivable dès que $x \mapsto \arccos(x^2)$ l'est, d'où
$$D_{f_6} = DC(f_6) = [-1, 1]$$
et
$$D_{f_6'} =]-1, 1[.$$
De plus, on a
$$\forall x \in D_{f_6} = [-1, 1],\ f_6(x) = \sin(\arccos(x^2))^2 = (\sqrt{1 - (x^2)^2})^2 = 1 - x^4,$$
d'où
$$\forall x \in D_{f_6'} =]-1, 1[,\ f_6'(x) = -4x^3.$$

Exercice XX.

1) a) La fonction $f : x \mapsto \text{argsh}(x) - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie, continue et dérivable dès que $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ l'est, i.e. dès que $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$, ce qui est toujours le cas. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, alors il est clair que $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$. Si $x < 0$, alors on a $x^2 < x^2 + 1$ donc $-x = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$ et donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$. Enfin, si $x = 0$, on a $x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 > 0$, donc dans tous les cas, on a $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ et donc
$$D_f = DC(f) = D_{f'} = \mathbb{R}.$$

b) Calculons f'. On a, par dérivation des fonctions composées

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \operatorname{argsh}'(x) - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh}'(x) - \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(\sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \operatorname{argsh}'(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Or, on a vu dans l'exercice XII que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

et on en déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0.$$

Ceci implique que f est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut $f(0)$. Or, on a $f(0) = \operatorname{argsh}(0) + \ln 1 = 0$, donc f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

On a donc trouvé une expression explicite de $\operatorname{argsh}(x)$, pour tout réel x.

2) On va suivre le même schéma de preuve. Posons $g : x \mapsto \operatorname{argch}(x) - \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. La fonction g est définie, continue et dérivable dès que argch et $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ le sont, i.e. dès que $x > 1$ et on obtient donc

$$D_g = DC(g) = D_{g'} =]1, +\infty[.$$

Ensuite, on calcule

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = \operatorname{argch}'(x) - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch}'(x) - \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{(\sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \operatorname{argch}'(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Là aussi, on a vu que

$$\forall x > 1,\ \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

et donc

$$\forall x > 1,\ g'(x) = 0,$$

ce qui implique que g est constante, égale à $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \operatorname{argch}(1) - \ln 1 = 0$, donc g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

En fait, on aurait pu trouver ces expressions directement sans utiliser la dérivation ; en inversant les équations $y = \operatorname{sh}(x)$ et $y = \operatorname{ch}(x)$. Pouvez-vous trouver comment ?