UPJV 2018-2019

UFR Sciences

Feuille 3

Méthodes et techniques de calcul

† *Calcul de limite*

Exercice I(N1)

Calculer les limites suivantes

$Lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{-7x+2}$, $Lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{5x^2+2}$, $Lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{x^4-5x}$.

$Lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, $Lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x-4}{-2x+2}$, $Lim_{x\to+\infty}e^{-x}sin(x)$,

$Lim_{x\to+\infty}xsin(x)$, $Lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}$,

$Lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, $Lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+ln(x)}{3^x+x^{122}}$, $Lim_{x\to0^+}ln[\frac{sin(x)}{x^2}]$

$Lim_{x\to+\infty}ln(1+x^2)$, $Lim_{x\to-\infty}ln(1+x^2)$, $Lim_{x\to+\infty}sin(\pi/4-1/x)$,

$Lim_{x\to+\infty}x+e^x$, $Lim_{x\to+\infty}e^{-ln^3(1+x^2)}$

Exercice II(N2)

Calculer les limites suivantes

$Lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}$, $Lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}$,

$Lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$, $Lim_{x\to0}\frac{sin(2x)}{x}$, $Lim_{x\to0}\frac{sin(3x)}{sin(2x)}$,

$Lim_{x\to0^+}\frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$, $Lim_{x\to0}\frac{2x^3-3x^2}{sin^2(x)}$, $Lim_{x\to0}\frac{xsin(2x)}{ln(1+x^2)}$.

$Lim_{x\to+\infty}sin(ln(x))$, $Lim_{x\to0^+}sin(\frac{1}{x})$, $Lim_{x\to0^+}xsin(\frac{1}{x})$

† *Généralisation de théorèmes classiques*

Exercice III (N3)

1) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé :

Soit f une fonction réelle de la variable réelle. On suppose f définie, continue sur $[a,+\infty[$ et admet une limite $\ell\in\mathbf{R}$ en $+\infty$, et $\ell\neq f(a)$. Montrer que si y est un réel strictement encadré par $f(a)$ et ℓ alors il existe un réel $c\in]a,+\infty[$ tel que $f(c)=y$.

2) Théorème de Rolle généralisé :

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose que $Lim_{x\to-\infty}f(x)=Lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.

Exercice IV (N3)

Montrer que si une fonction périodique définie sur $\mathbf{R}$ admet une limite en $+\infty$ alors elle est constante.

† *Continuité, prolongement par continuité*

Exercice V (N2)

Soit f la fonction définie par
$f(x) = x^2 - 3x$ si $x < -1$, $f(x) = 3x + 7$ si $-1 \leq x < 1$, $f(x) = 0$ si $x = 1$,
$f(x) = \frac{20cos(2\pi x)}{x+1}$ si $1 \leq x$.
Calculer
$f(-1), f(1), Lim_{x\to -1^-} f(x), Lim_{x\to -1^+} f(x), Lim_{x\to 1^-} f(x), Lim_{x\to 1^+} f(x)$
Quel est le domaine de continuité de f?

Exercice VI (N2)

Soit f la fonction définie par
$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$ si $x \neq 4, -4$ et $f(-4) = a$ et $f(4) = b$.
Etudier le domaine de continuité de f.

Exercice VII(N2)

Calculer le domaine définition des fonctions définies par les formules

$$f(x) = \frac{|x|^{3/2} - 1}{x - 1}$$

et

$$g(x) = ln(|x|)$$

Peut-on les prolonger par continuité à $\mathbf{R}$?

Exercice VIII (N3)

Soit f la fonction définie par
$f(x) = \frac{1}{|x|^{3/2}} sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
1) Quel est le domaine de définition de f?
2) Calculer $Lim_{x\to 0^-} f(x), f(0)$ et $Lim_{x\to 0^-} f(x)$.
Quel est le domaine de continuité de f?
3) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, f est elle dérivable en 0?
4) Quel est le domaine de dérivabilité de f quelle est l'expression de sa fonction dérivée, quel est le domaine de continuité de la fonction dérivée de f?

Exercice IX

Soit $f(x) = xln(x)$
1) Quel est le domaine de définition de f?
2) Calculer si elle existe l'expression de la fonction dérivée. Donner le tableau des variations de f.
3) Donner l'allure du graphe de f.

† *Fonctions de plusieurs variables*

Exercice X(N1)

Calculer les domaines de définition des fonctions de deux variables réelles suivantes :

1) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+yx+1}$ On pourra étudier la fonction $y = -(x^2+1)/x$

2) $g(x,y) = ln(x+y)$

3) $h(x,y) = \sqrt{ln(x-y)}$

Exercice XI(N1)

Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2y + sin(xy)$

2) $g(x,y) = \frac{xsin(y)+cos(x)y}{xy}$

Exercice XII (N3)

1) Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle on la suppose définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour x et y deux variables réelles on pose $g(x,y) = f(xy)$, calculer les dérivées partielles de g par rapport aux variables x et y.

2) Déduire de 1) que si on suppose que pour tout réels x et λ on a $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ alors pour tout x on a $xf'(x) = 2f(x)$. Quelles sont ces fonctions?