Feuille 3

Exercice I.

- Comme dans toutes ces limites de fractions rationnelles en $\pm\infty$, c'est la règle des monômes de plus haut degré qui s'applique. Il n'est pas indispensable de s'en souvenir par cœur, il suffit de diviser par autant de puissances de x qu'il faut pour lever l'indétermination. Ici par exemple, on peut diviser par x qui peut être supposé non nul puisqu'on prend la limite en $+\infty$. On écrit
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3-\frac{4}{x}}{-7+\frac{2}{x}}$$
et cette forme indéterminée n'en est plus une : le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers -7, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} = -\infty.$$
- On procède de même et on écrit
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{5x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}} = \frac{2}{5}.$$
- De même
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^4-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{x^2-\frac{5}{x}} = 0.$$
- Ici c'est un petit peu plus astucieux. On a la formule (à connaître)
$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$
Dans notre cas, on peut écrire
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ x^n-1=(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$
Ainsi, on a
$$\forall x\neq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{x-1}{(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$
et cette quantité tend vers $\frac{1}{n}$ quand x tend vers 1 et donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{n}.$$

- Distinguons si $x \to 1^+$ ou si $x \to 1^-$. Le numérateur vaut 1 en 1 et le dénominateur tend vers 0^+ pour $x \to 1^-$ et vers 0^- quand $x \to 1^+$, donc la limite n'existe pas :

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+3x-4}{-2x+2} \text{ n'existe pas.}$$

- On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{-x}\sin(x)| \leq e^{-x},$$
qui tend vers 0 en $+\infty$, d'où
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin(x) = 0.$$

- Comme la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$ (voir l'exercice IV pour s'en convaincre) et que x tend vers $+\infty$, la limite voulue n'existe pas. Plus précisément, si $x \mapsto x\sin(x)$ admettait une limite, elle devrait être nulle puisqu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{(4n+1)\pi}{2}\sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \frac{(4n+1)\pi}{2} > 0$$
et
$$\frac{(4n+3)\pi}{2}\sin\left(\frac{(4n+3)\pi}{2}\right) = -\frac{(4n+3)\pi}{2} < 0$$
et on voit alors que la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ possède des valeurs négatives et positives pour x aussi grand qu'on veut. Or, si la limite est nulle, alors sin est aussi de limite nulle en $+\infty$, ce qui est absurde.

- Ici, on peut être tenté d'utiliser l'expression conjuguée, mais cela ne marche pas (essayez !, le problème vient du fait que les puissances de x sous les racines ne sont pas les mêmes et donc ne se simplifient pas). On écrit plutôt que, comme pour tout $x \geq 0$ on a $x^2+1 \leq x^2+2x+1 = (x+1)^2$,
$$\forall x \geq 0,\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)^2}$$
$$= \sqrt{x+1} - (x+1) = \sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})$$
et ceci donne
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = -\infty.$$

- Cette fois-ci, on peut utiliser l'expression conjuguée et écrire
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 0.$$

- On ne s'embarrasse pas du x^{122} et on écrit
$$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{2^x+\ln(x)}{3^x+x^{122}} \leq \frac{2^x+\ln(x)}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{\ln x}{3^x}.$$
Comme $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, la limite de $\left(\frac{2}{3}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ en $+\infty$ est nulle. D'autre part, comme $\ln 3 > \ln e = 1$, on a que $\frac{x}{3^x} = \frac{x}{e^{x\ln 3}} \leq \frac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{3^x} = 0$$

donc que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{\ln(x)}{3^x}=0$$

et donc que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+\ln x}{3^x+x^{122}}=0.$$

- Comme $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ (c'est la règle de l'Hôpital), on a $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=+\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)=+\infty.$$

- Comme $\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$, on a directement

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty.$$

- De même, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)=+\infty.$$

- Ici, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{4}$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- On a $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty=\lim_{x\to+\infty}e^x$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}x+e^x=+\infty.$$

- Enfin, comme $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty}\ln^3(1+x^2)=+\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\ln^3(1+x^2)}=\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=0.$$

Exercice II.

- On utilise l'expression conjuguée et on écrit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}-\frac{2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}}=-1.$$

- C'est encore l'expression conjuguée :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+4-4}{x(\sqrt{x^2+x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

- Celle-ci est beaucoup plus subtile ; si vous avez trouvé, bien joué ! Nous allons donner deux méthodes (éssentiellement identiques) pour trouver le résultat. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
On introduit de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général
$$v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

  1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $N := \frac{1}{n}$. Le terme général de la suite (v_n) se réécrit
  $$v_n = \ln(u_n) = \frac{\ln(N+1)}{N}.$$
  Si l'on cherche à calculer la limite de (v_n), on peut reconnaître un taux d'accroissement en 1 de la fonction ln et écrire
  $$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{N\to 0} \frac{\ln(1+N)-\ln 1}{N} = \ln'(1) = 1$$
  et on en déduit que
  $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n} = e^1 = e.$$
  2. On peut remarquer que le terme de (v_n) s'écrit encore
  $$v_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n(\ln(n+1)-\ln(n)).$$
  Or, par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in]n, n+1[$ tel que
  $$\ln(n+1)-\ln(n) = \ln'(x_n) = \frac{1}{x_n}.$$
  Comme, pour tout n on a $x_n \in]n, n+1[$, il vient
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < v_n = \frac{n}{x_n} \leq \frac{n}{n+1}$$
  donc la suite (v_n) tend vers 1 quand $n \to \infty$ par le théorème des gendarmes et donc
  $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n} = e.$$

Dans tous les cas, on a obtenu la limite importante suivante
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
En utilisant la même méthode, essayez de montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

- On a, avec la règle de l'Hôpital que l'on peut appliquer (le vérifier !)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin(2x)}{2x} = 2.$$

- De même, comme $x \mapsto \sin(2x)$ ne s'annule qu'en 0, que $x \mapsto 2\cos(2x)$ ne s'annule pas en 0, la règle de l'Hôpital permet d'écrire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3\cos(3\times 0)}{2\cos(2\times 0)} = \frac{3}{2}.$$

- On recycle le calcul de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pour écrire

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Et on le recycle encore :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3-3x^2}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}(2x-3)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = -3.$$

- On utilise la deuxième règle de l'Hôpital. On le fait pour $x \to 0^-$; pour $x \to 0^+$ c'est exactement pareil. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 en 0^- et le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1,0[$. Le numérateur est une fonction dérivable sur $[-1,0[$, de dérivée $x \mapsto \sin(2x)+2x\cos(2x)$. De même, le dénominateur est dérivable sur $[-1,0[$, de dérivée $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ qui ne s'annule pas sur $[-1,0[$. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital et écrire

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)+2x\cos(2x)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0^-}(1+x^2)\left(\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)+\cos(2x)\right) = 2,$$

et de même on obtient $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = 2$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\ln(1+x^2)} = 2.$$

- Comme $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et que sin n'a pas de limite en $+\infty$, la limite n'existe pas

$$\lim_{x\to +\infty} \sin(\ln(x)) \text{ n'existe pas.}$$

- De même, comme sin n'a pas de limite en $+\infty$, la limite n'existe pas

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas.}$$

- Comme on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

la limite recherchée est nulle

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exercice III.

1) C'est un exercice théorique, on va donc utiliser la définition théorique de limite vue en cours. Comme $\ell \neq f(a)$, quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < \ell$. Par définition, si on a $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, et $f(a) < y < \ell$, alors il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$ on ait
$$|f(x) - \ell| < \frac{\ell - y}{3}$$
et alors, pour tout $x \geq A$, on a $f(x) > y$, donc $f(A) > y$ et par le théorème des valeurs intermédiaires classique, il existe $c \in]a, A[\subset]a, +\infty[$ tel que $f(c) = y$, d'où le résultat.

2) Tout d'abord, si f est constante égale à zéro, le résultat est clair. SInon, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(x_0) > 0$. Si $f(x_0)$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x_0) = 0$ et $c := x_0$ convient. Sinon, comme on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, il existe $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_1) = f(x_0)$. En effet, il existe $u \neq x_0$ tel que $f(u) > f(x_0)$ (puisque $f(x_0)$ n'est pas un maximum de f sur $\mathbb{R}$) et si par exemple $u > x_0$, le fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ impose l'existence de $x_1 > u$ tel que $f(x_1) = f(x_0)$ par le théorème des valeurs intermédiaires. On applique alors le théorème de Rolle classique à f sur $[x_0, x_1]$ pour conclure.

Exercice IV.

Posons $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit T la période de f (i.e. $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x). Supposons tout d'abord que ℓ ne soit pas finie (i.e. $\ell \in \{\pm\infty\}$). Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\ell = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \geq nT$ on ait $f(x) \geq A$, donc $f(0) = f(0+nT) = f(nT) \geq A$, d'où $f(0) \geq A$ pour tout $A > 0$, ce qui est impossible. La limite ℓ doit donc être finie. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas constante égale à ℓ. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. Comme f est périodique, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_0 + nT) = f(x_0) \neq \ell.$$
Soit $\varepsilon := |f(x_0) - \ell| > 0$. Par ce qui précède, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ x_0 + nT \geq x \text{ et } |f(x_0 + nT) - \ell| \geq \varepsilon$$
et ceci est la négation du fait que $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$: contradiction !

Exercice V.

Soit la fonction
$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 3x & \text{si} & x < -1 \\ 3x + 7 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} & x = 1 \\ \frac{20\cos(2\pi x)}{x+1} & \text{si} & 1 \leq x \end{array} \right. \end{array}$$

- On a, par définition de f :
$$f(-1)=4 \text{ et } f(1)=0.$$
Ensuite, on a
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=4 \text{ et } \lim_{x\to -1^+} f(x)=4,$$
ainsi que
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=10 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x)=10.$$
Donc,
$$\lim_{x\to 1} f(x)=10\neq 0=f(1)$$
et on a
$$\lim_{x\to -1} f(x)=4=f(-1).$$
- Des calculs ci-dessus, on tire que f est continue en -1 mais pas en 1. Il est par ailleurs clair que f est continue ailleurs et qu'on a donc
$$DC(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[.$$

Exercice VI.

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et f la fonction
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\frac{x-4}{x^2-16} & \text{si } x\neq\pm4\\ a & \text{si } x=-4\\ b & \text{si } x=4\end{cases}$$
On a
$$\forall x\neq 4,\ f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}=\frac{x-4}{(x-4)(x+4)}=\frac{1}{x+4},$$
d'où
$$\lim_{x\to -4^-} f(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{1}{x+4}=-\infty,\quad \lim_{x\to -4^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 4} f(x)=\frac{1}{8}.$$
Ainsi, f n'admet jamais de limite en -4, donc n'y est jamais continue. Elle est continue en 4 si et seulement si $\frac{1}{8}=\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=b$. On en tire que
$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ DC(f)=\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{\pm4\} & \text{si } b\neq\frac{1}{8}\\ \mathbb{R}\setminus\{-4\} & \text{si } b=\frac{1}{8}\end{cases}$$

Exercice VII.

- Soit la fonction
$$f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{|x|^{\frac{3}{2}}-1}{x-1}$$

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme composée, combinaison linéaire et quotient de fonctions continues. Ensuite, on a, en utilisant l'expression conjuguée

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(x^{\frac{3}{2}}+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^{\frac{3}{2}}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^{\frac{3}{2}}+1} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$ en posant

$$f(1) := \frac{3}{2}.$$

- Ici, la fonction

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Par contre, on a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \notin \mathbb{R},$$

donc g ne peut pas être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice VIII.

Soit la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} |x|^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1) On a clairement

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2) La limite

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

n'existe pas car autrement, en prenant la suite de points $x_n := \frac{1}{2n\pi}$ et en faisant tendre $n \in \mathbb{N}$ vers $+\infty$ on trouverait une limite nulle et donc $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ tendrait vers 0 en 0, ce qui n'est pas. De même, f n'admet pas de limite en 0^+, donc n'admet pas de limite en 0. Par ailleurs, on a $f(0) = 0$. De plus, comme f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et pas en 0, on obtient

$$DC(f) = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et quotient de fonctions qui y sont dérivables. De plus, comme $D_{f'} \subset DC(f) = \mathbb{R}^*$, on a $D_{f'} = \mathbb{R}^*$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{-x^3}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^3}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\forall x<0,\ f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)(-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\sqrt{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} = \sqrt{-x}\left(\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}+\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}{x^3}\right)$$

et de même

$$\forall x>0,\ f'(x) = -\sqrt{x}\left(\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}+\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}{x^3}\right).$$

De plus, f ne saurait être dérivable en 0 puisqu'elle n'y est pas continue.

4) On a vu que

$$D_{f'} = \mathbb{R}^*$$

et que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}\left(\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}+\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}{x^3}\right) & \text{si} \quad x<0 \\ -\sqrt{x}\left(\frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}+\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}{x^3}\right) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

On note que f' est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, donc

$$DC(f') = \mathbb{R}^*.$$

Exercice IX.

1) La fonction $f : x \mapsto x\ln x$ est définie dès que ln l'est, i.e. sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où

$$D_f = \mathbb{R}_+^*.$$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui y sont dérivables et on a

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x)+1.$$

La dérivée f' s'annule en e^{-1}, est négative sur $]0,e^{-1}[$ et positive sur $]e^{-1},+\infty[$, d'où le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty.$$

On a donc une branche parabolique de direction O_y en $+\infty$. On a de plus $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées et $f(1)=0$, avec une tangente d'équation $T : y = f'(1)(x-1)+f(1) = x-1$. On en déduit l'allure du graphe de f :

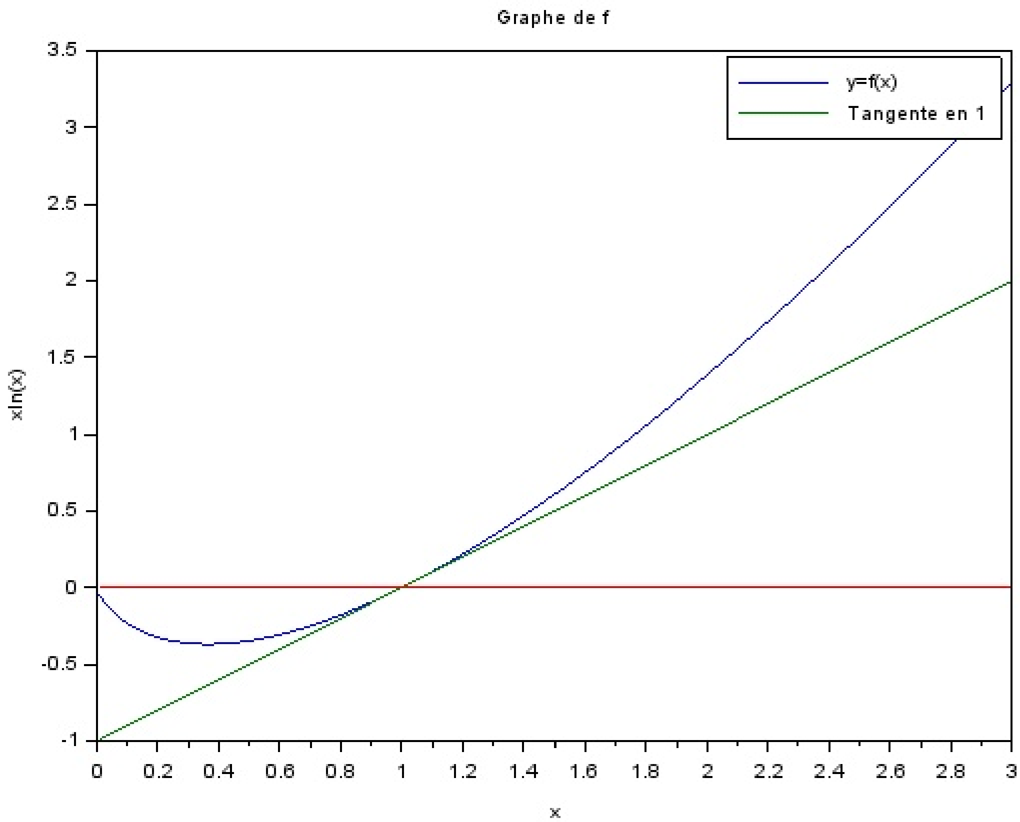

FIGURE 0.1 – Allure du graphe de $f : x \mapsto x\ln(x)$

Exercice X.

1) Soit la fonction réelle de deux variables réelles $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+xy+1}$. Cette fonction est définie dès que $x^2 + xy + 1 \neq 0$, i.e. dès que $y \neq -\frac{x^2+1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Étudions donc la fonction $u : x \mapsto -x - \frac{1}{x}$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a
$$\forall x \neq 0,\ u'(x) = \frac{1}{x^2} - 1.$$
Le tableau de variations de u est donné par

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$u(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -1 - \frac{1}{x^2} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x) + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

On a donc une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = -x$. De même, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{u(x)}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} u(x) + x = 0,$$

donc l'asymptote oblique en $+\infty$ est aussi une asymptote oblique en $-\infty$. On en déduit l'allure du graphe de u et donc le domaine de définition de f, qui est tout le plan, privé de la courbe en rouge ci-dessous :

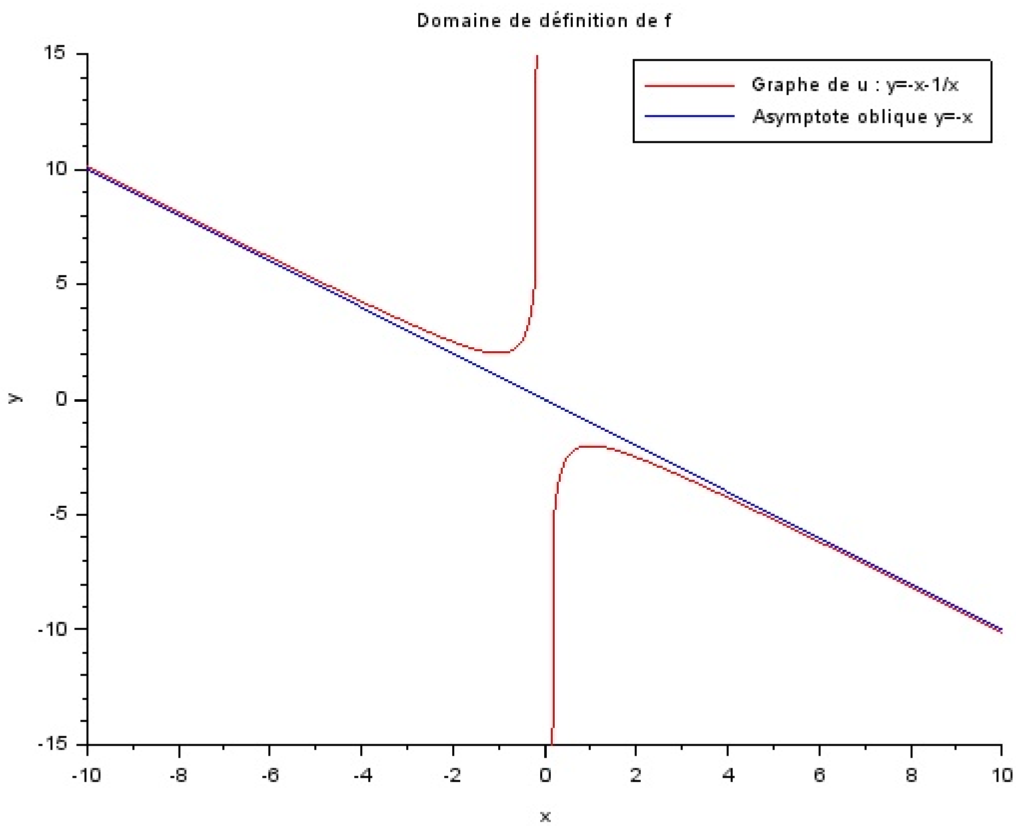

FIGURE 0.2 – La fonction f est définie hors de la courbe rouge

2) La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y)$ est définie dès que $x + y > 0$, i.e. dès que $y > -x$. Il s'agit du domaine repreésenté par les points noirs sur la figure suivante (attention, la ligne verte n'est pas incluse dans le domaine de définition de g) :

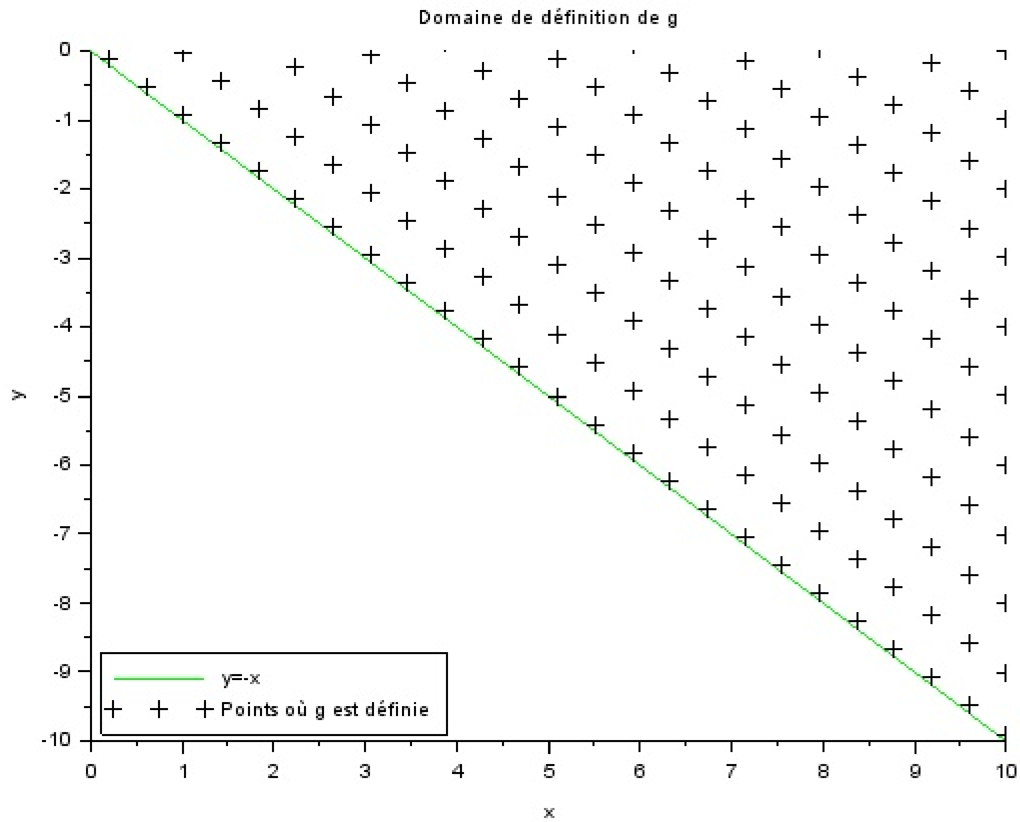

FIGURE 0.3 – Délimitation du domaine de g

3) La fonction $h : (x,y) \mapsto \sqrt{\ln(x-y)}$ est définie dès que $\ln(x-y)$ est défini et est positif ou nulle, i.e. dès que $x - y \geq 1$ i.e. dès que $y \leq x - 1$. Il s'agit du domaine représenté par les points verts sur la figure suivante (ici la ligne verte est incluse dans le domaine de h) :

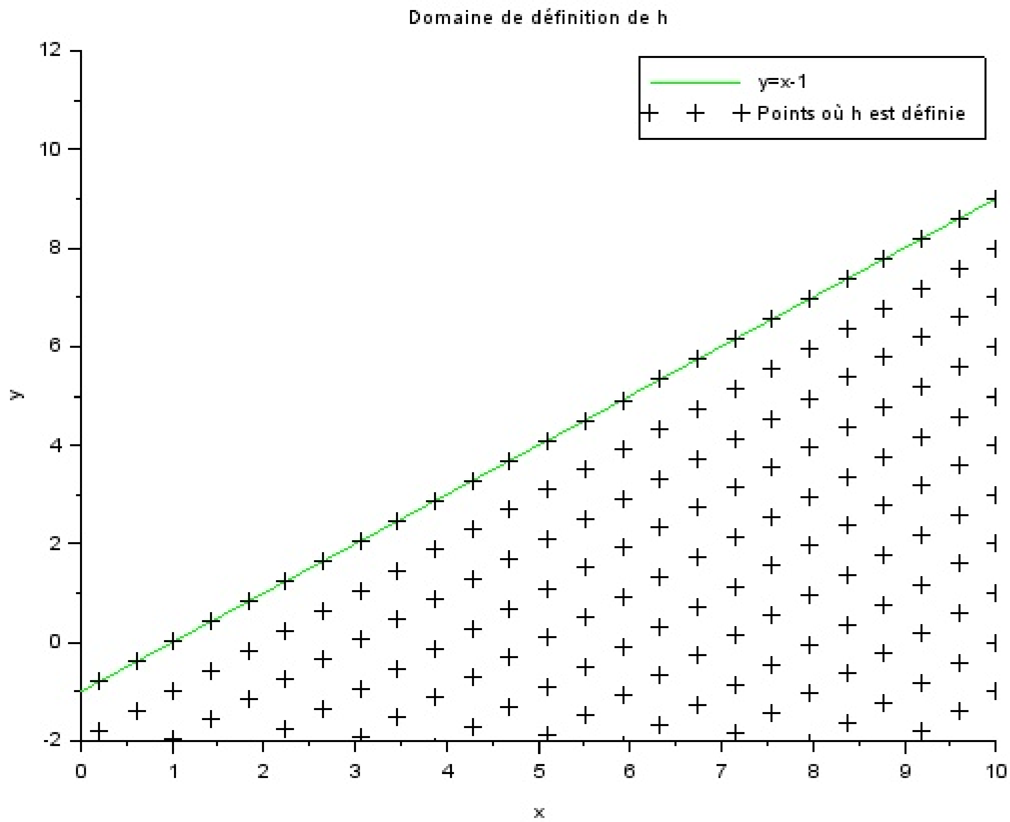

FIGURE 0.4 – Délimitation du domaine de h

Exercice XI.

1) Soit la fonction

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2y+\sin(xy) \end{array}$$

Les dérivées partielles de f peuvent être calculées en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\; \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y\cos(xy) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x\cos(xy) \end{cases}$$

2) La fonction $g : (x,y)\mapsto \frac{x\sin(y)+y\cos(x)}{xy}$ est définie dès que $xy\neq 0$, i.e. dès que $x\neq 0$ et $y\neq 0$ et en peut calculer ses dérivées partielle en chacun de ces points en utilisant la formule de dérivation des quotients :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;;\; xy\neq 0,\; \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{(\sin(y)-y\sin(x))xy - y(x\sin(y)+y\cos(x))}{x^2y^2}$$

$$= -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

et
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{(x\cos(y)+\cos(x))xy-x(x\sin(y)+y\cos(x))}{x^2y^2}=\frac{\cos y}{y}-\frac{\sin y}{y^2},$$
d'où
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy\neq 0,\ \begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\cos y}{y}-\frac{\sin y}{y^2}\end{cases}$$
En considérant $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *comme des fonctions de deux variables, on peut encore les dériver et on remarque que*
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x+\cos(xy)-xy\sin(xy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y).$$
De même, avec g *on remarque que*
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy\neq 0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y).$$
En fait, ceci est un fait général : sous une hypothèse technique, toute fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *vérifie*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$
C'est ce qu'on appelle le théorème de Schwarz.

Exercice XII.

1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable et posons
$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ & & (x,y) & \mapsto & f(xy)\end{array}$$
Comme f est dérivable, on peut calculer les dérivées partielles de g :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=yf'(xy)\ \text{ et }\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xf'(xy).$$

2) On remarque qu'on a
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=xyf'(xy)=y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$
De plus, la relation $f(\lambda x)=\lambda^2 f(x)$ valable pour tous $\lambda,x\in\mathbb{R}$ implique que l'on peut recalculer les dérivées partielles de g :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=f(xy)=x^2f(y)$$
d'où
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2xf(y).$$

De même, on a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 f'(y).$$
Or, la relation trouvée plus haut $x\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial y}$ entraîne alors
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 f(y) = x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 y f'(y).$$
En évaluant cette relation en $x = 1$, il vient finalement
$$\forall y \in \mathbb{R},\ 2f(y) = yf'(y),$$
comme souhaité. On a maintenant deux méthodes pour finir l'exercice :

* On peut anticiper sur le TD d'équations différentielles et résoudre l'équation
$$xf' - 2f = 0.$$
Résolvons-la sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après le cours sur les équations différentielles, les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_-^*$ s'écrivent $f : x \mapsto k_1 e^{2\ln x} = k_1 x^2$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de cette équation sont données par $f : x \mapsto k_2 e^{2\ln x} = k_2 x^2$. Comme on veut que f soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation et soit continue, on doit avoir $k_1 = k_2$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xf' - 2f = 0$ sont données par
$$f : x \mapsto kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$
Finalement, les seules fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall \lambda, x \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$
sont les fonctions
$$f : x \mapsto kx^2,$$
avec $k \in \mathbb{R}$ un réel quelconque.
* Une autre méthode, beaucoup plus simple, consiste à évaluer la relation $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ en $x = 1$ pour obtenir
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = f(\lambda \times 1) = \lambda^2 f(1).$$
Ainsi, en posant $k := f(1)$, on obtient que les seules fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ s'écrivent nécessairement
$$f : x \mapsto kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$