UPJV 2018-2019

UFR Sciences

Feuille 4

Méthodes et techniques de calcul

† *Parité, symétrie, périodicité, réduction du domaine d'étude.*

Exercice I (N1)

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est paire ou impaire

$f_1(x) = x^4 + 3 \quad , \quad f_2(x) = x^4 + x \quad , \quad f_3(x) = x^5 + x^3 + 1$

Exercice II (N2)

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ on suppose que f est impaire montrer qu'alors $f(0) = 0$.

Soit f une fonction paire continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée continue, montrer que sa fonction dérivée est impaire.

Exercice III (N2)

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 2$ satisfait pour tout réel x : $f(x) = f(6 - x)$.

Quelle propriété de symétrie est satisfaite par le graphe de f? Quel pourrait être un domaine d'étude?

Exercice IV(N2)

1) Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 17x/2 + 1}{x + 2}$$

Montrer que son graphe présente une symétrie par rapport à l'axe $x = -2$.

Proposer un domaine d'étude.

2) Soit g la fonction définie par la formule

$$g(x) = \frac{e^x - e^{2-x}}{2}$$

Montrer que son graphe présente une symétrie centrale par rapport au point de coordonnées $(1, 0)$. Proposer une domaine d'étude.

Exercice V (N2)

Pour chacune des fonctions suivantes donner le domaine de définition et proposer un domaine d'étude.

$f_1(x) = sin(2x), \quad f_2(x) = sin(x^2), \quad f_3(x) = sin(3x - 1)$

† *Comportement asymptotique*

Exercice VI (N2)

Si cela a un sens, déterminer les comportements asymptotiques en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$, $f_2(x) = \sqrt{x + ln(x)}$, $f_3(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}$,

$f_4(x) = 2x + ln(1 + x^4)$, $f_5(x) = e^{2ln(x+1)}$, $f_6(x) = 2x + 1 + e^{-x}sin(x)$.

† *Etudes de fonctions*

Exercice VII

Etudier les fonctions définies par les formules suivantes

$f_1(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

$f_2(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2}$.

$f_3(x) = x^x$.

Exercice VIII

1) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, on a $e^{x^2+1} > x$

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = ln(e^{x^2+1} - x)$.

3) Calculer $f'(x)$

4) Montrer que$f'(x)$ s'annule exactement une fois (on pourra calculer la dérivée seconde) sur $\mathbf{R}$. Donner une valeur approchée à $1/16$ près de cette annulation.

6) Donner un tracé approximatif du graphe de f.

Extraits d'examen

Session 2 (2016-2017)

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

1) Quel est le domaine de définition de la fonction f (*1 pt*)

2) Donner une expression de la fonction dérivée de f et le domaine de dérivabilité (*1,5 pt*)

3) Que valent $lim_{x\to-\infty} f(x)$, $f(-2)$, $f(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$? (*0,25 pt par réponse*)

4) Montrer que pour tout réel x dans le domaine de définition de f on a $f(-1-x) = f(x)$. quelle symétrie du graphe de f peut-on en déduire ? (on pourra remarquer que le milieu de x et de $-1-x$ est $\frac{-1}{2}$) (*1 pt + 1 pt*)

5) Donner le tableau des variations de f (*1 pt*)

5) En utilisant la quantité conjuguée calculer $lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2 + x - 2} - (x + \frac{1}{2})]$. Que peut-on en déduire? (*1,5 pt + 1 pt*)

6) Montrer que $lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$ (*0,5 pt*)

7) Donner un tracé du graphe de f (*2 pt*)

Contrôle continu 2014-2015

Calculer les limites suivantes

(a) $lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+ln(x^8)}{3^x+x^{78}}$; (b) $lim_{x\to O^+} ln(\frac{sin(x)}{x^2})$

Contrôle continu 2014-2015

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}}$$

1) Quel est le domaine de définition de la fonction f?
2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3) Quel est le domaine de dérivabilité de f et calculer sa fonction dérivée.
4) Montrer que $\sqrt{6} > 2$. Montrer que $-1 + \sqrt{6}$ et $-1 - \sqrt{6}$ ne sont pas dans le domaine de définition de f.
5) Donner le tableau des variations de f.
6) Trouver le réel a tel que $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = x - a + \dfrac{6}{x + 1}$
7) Calculer $lim_{x \to +\infty} f(x) - \sqrt{x - 4}$.
8) Que pouvez vous dire des graphes de la fonction f et de la fonction définie par la formule $g(x) = \sqrt{x - 4}$?
9) Donner la représentation graphique de f