UPJV(Amiens) 2018-2019
Méthodes et techniques de calcul. L1S1

Feuille de TD n°4 (Correction)

Exercice 1.

1. On calcule
$$f_1(-x) = (-x)^4 + 3 = x^4 + 3 = f_1(x)$$
Donc la fonction f_1 est paire.
2. On calcule
$$f_2(-x) = (-x)^4 - x = x^4 - x$$
Qui n'est égal ni à $f_2(x)$ ni à $-f_2(x)$, la fonction f_2 n'est donc ni paire, ni impaire.
3. On calcule
$$f_3(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + 1 = -x^5 - x^3 + 1$$
Qui n'est égal ni à $f_3(x)$ ni à $-f_3(x)$, la fonction f_3 n'est donc ni paire, ni impaire.

Exercice 2.

1. Comme la fonction f est impaire, on a :
$$f(0) = f(-0) = -f(0)$$
donc $2f(0) = 0$ et $f(0) = 0$.
2. Il faut revenir à la définition de dérivée comme limite d'un taux d'accroissement :
$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$
(car f est paire)
$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$
(on peut sortir le $-$ car la limite existe)
$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
(on peut prendre h ou $-h$ car la fonction est de dérivée continue)
$$= -f'(x)$$
(par définition) On a donc bien $f'(-x) = -f'(x)$ et la fonction est impaire.

Exercice 3.

1. On calcule

$$\begin{aligned} f(6-x) &= (6-x)^2 - 6(6-x) + 2 \\ &= x^2 - 12x + 36 + 6x - 36 + 2 \\ &= x^2 - 6x + 2 = f(x) \end{aligned}$$

2. Comme le milieu de 6 et 0 est 3, on a

$$f(3-x) = f(6-(3-x)) = f(3+x)$$

Et donc le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 3$, on peut donc se contenter d'étudier f sur le domaine $[3, +\infty[$ [1]

Exercice 4.

1. C'est long, mais on calcule

$$\begin{aligned} f(-2-x) &= \frac{-(2+x)^3 + 6(2+x)^2 - \frac{17}{2}(2+x) + 1}{-x} \\ &= \frac{(2+x)^3 - 6(2+x)^2 + \frac{17}{2}(2+x) - 1}{x} \\ &= \frac{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 6(x^2 + 4x + 4) + \frac{17}{2}(x+2) - 1}{x} \\ &= \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + \frac{17}{2}x + 17 - 1}{x} \\ &= \frac{x^3 - \frac{7}{2}x}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2+x) &= \frac{-(2-x)^3 + 6(2-x)^2 - \frac{17}{2}(2-x) + 1}{x} \\ &= \frac{-(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) + 6(x^2 - 4x + 4) - \frac{17}{2}(-x+2) + 1}{x} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 - 24x + 24 + \frac{17}{2}x - 17 - 1}{x} \\ &= \frac{x^3 - \frac{7}{2}x}{x} \end{aligned}$$

Le graphe de f présente donc une symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = -2$, on peut donc se contenter d'étudier f sur le domaine $]-\infty, -2]$ (toujours négatif).

2. Dire que le graphe de g présente une symétrie centrale par rapport au point de coordonnée $(0, 1)$ revient à dire que l'on a $g(1-x) = -g(1+x)$, on a :

$$g(1-x) = \frac{e^{1-x} - e^{2-1+x}}{2} = \frac{e^{1-x} - e^{1+x}}{2}$$

$$g(1+x) = \frac{e^{1+x} - e^{2-1-x}}{2} = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2} = -g(1-x)$$

On a donc bien une symétrie centrale, on peut donc se contenter d'étudier g sur le domaine $[1, +\infty[$.

1. on aurait pu choisir $]-\infty, 3]$, mais l'autre domaine a l'avantage de ne comporter que des réels de même signe (positif).

Exercice 5. Toute les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (puisque la fonction sin, les fonctions affines et la fonction $x \mapsto x^2$ le sont). Pour restreindre le domaine d'étude, on va chercher des symétries (on a de bonnes chances d'en trouver, sachant que la fonction sin est impaire).

1. On a $f_1(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f_1(x)$ donc la fonction f_1 est impaire : on peut se contenter de l'étudier sur $[0, +\infty[$.
2. On a $f_2(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f_2(x)$ donc la fonction f_2 est paire : on peut se contenter de l'étudier sur $[0, +\infty[$.
3. On sait que le graphe de la fonction sin présente une symétrie centrale par rapport au point $(0, 0)$, or, la fonction $x \mapsto 3x - 1$ s'annule en $x = 1/3$, calculons donc :

   $$f_3(1/3 - x) = \sin(1 - x - 1) = \sin(-x) = -\sin(x) = -\sin(1 + x - 1) = -f_3(1/3 + x)$$

   Donc la fonction f_3 présente une symétrie centrale par rapport au point $(1/3, 0)$, on peut donc se contenter d'étudier f_3 sur le domaine $[1/3, +\infty[$.

Exercice 6.

1. En $+\infty$, la fonction f_1 admet clairement $+\infty$ pour limite (le terme de plus haut degré (ici 3) est au numérateur), on a :

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

   Comme la limite est un réel non nul, on calcule

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f_1(x) - 1x &= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3 - 2x) - (x^3 + x)}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x - x^2 - x}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

   Comme cette limite est un réel, la fonction f_1 admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 1x + 0 = x$.

   En $-\infty$, la fonction f_1 admet clairement $-\infty$ pour limite (le terme de plus haut degré (ici 3) est au numérateur), on a :

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

   Comme la limite est un réel non nul, on calcule

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f_1(x) - 1x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^3 - 2x) - (x^3 + x)}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x - x^2 - x}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

   Comme cette limite est un réel, la fonction f_1 admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 1x + 0 = x$.

2. À nouveau, il est clair que f_2 admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on calcule donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+\ln(x)}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}} = 0$$

   Comme cette limite est nulle, la fonction f_2 admet une branche parabolique de direction Ox.

   La fonction f_2 n'est pas définie pour les réels inférieurs à 0, donc sa limite en $-\infty$ n'a pas le moindre sens.

3. À nouveau, il est clair que f_3 admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on calcule donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x)x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x^2+2x+5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

   Comme cette limite est un réel non nul, on calcule

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f_3(x) - 2x &= \frac{4x^2+2x+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+5}+2x} \\
\lim_{x\to+\infty} &= \frac{2x+5}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)} \\
\lim_{x\to+\infty} &= \frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Comme cette limite est un nombre réel, la fonction f_3 admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$.

   Le même raisonnement s'applique en $-\infty$.

4. À nouveau, il est clair que la fonction f_4 admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, on calcule donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\ln(1+x^4)}{x} = 2$$

   Comme cette limite est un réel non nul, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^4) = +\infty$$

   Donc la fonction f_4 admet une branche parabolique de direction $y = 2x$.

   Le même raisonnement s'applique en $-\infty$.

5. La fonction f_5 est définie si et seulement si $x > -1$ (donc on ne peut pas étudier son comportement en $-\infty$), on a alors $f_5(x) = (x+1)^2$, qui admet clairement une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.

6. En $+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 + e^{-x}\sin(x) = +\infty$, on calcule donc

$$\frac{f_6(x)}{x} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}\sin(x)}{x} = 2$$

qui est un réel non nul, on calcule donc :

$$f_6(x) - 2x = 1 + e^{-x}\sin(x) = 1$$

Qui est un nombre réel, la fonction f_6 admet donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 1$.

En $-\infty$, la fonction f_6 n'admet pas de limite.

Exercice 7.

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et dérivable de dérivée continue sur ce domaine, avec

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+3)e^{-x} \\ &= (-x^2-1)e^{-x} \end{aligned}$$

Qui est clairement négative sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{e^x} = 0$$

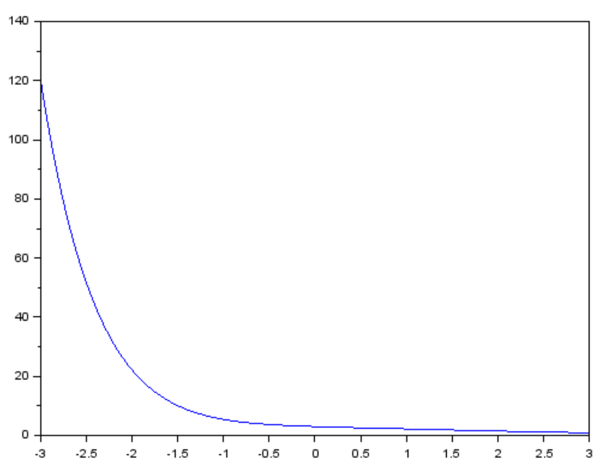
D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

De plus, le graphe de f_1 admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, en $-\infty$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(x + 2 + \frac{3}{x}\right) e^{-x} = -\infty$$

Donc le graphe de f_1 admet une branche parabolique de direction Oy en $-\infty$, d'où l'allure suivante :



2. La fonction f_2 n'est définie que si $x-2 \neq 0$, c'est à dire que $\mathbb{R}\setminus\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, elle est clairement dérivable et de dérivée continue sur ce domaine, avec

$$f_2'(x) = \frac{(4x-3)(x-2)-(2x^2-3x)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2-3x-8x+6-2x^2+3x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$$

Comme le dénominateur de cette fraction est un carré (toujours positif), son signe est celui du trinôme $2x^2-8x+6$, on a :

$$\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 6 = 64-48 = 16 = 4^2$$

Les deux racines de ce trinôme sont donc :

$$x_1 = \frac{8-4}{2\times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+4}{2\times 2} = 3$$

D'où le tableau de signes/variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

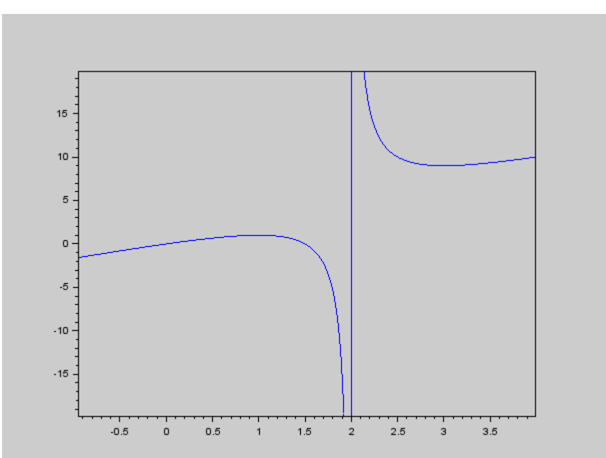
De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x-2x^2+4x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-2} = 1$$

Donc la fonction f_2 admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x+1$ (cela vaut aussi en $+\infty$ par le même argument), d'où l'allure suivante :



3. La définition x^x n'a de sens que si x est un entier strictement négatif, ou si $x > 0$, auquel cas, on a $x^x = e^{x\ln(x)}$, on étudie donc la fonction f_3 sur $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel elle est continue et dérivable, de dérivée

$$f_3'(x) = (\ln(x) + \frac{x}{x})e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$$

Comme l'exponentielle est toujours positive, on a

$$f_3'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$$

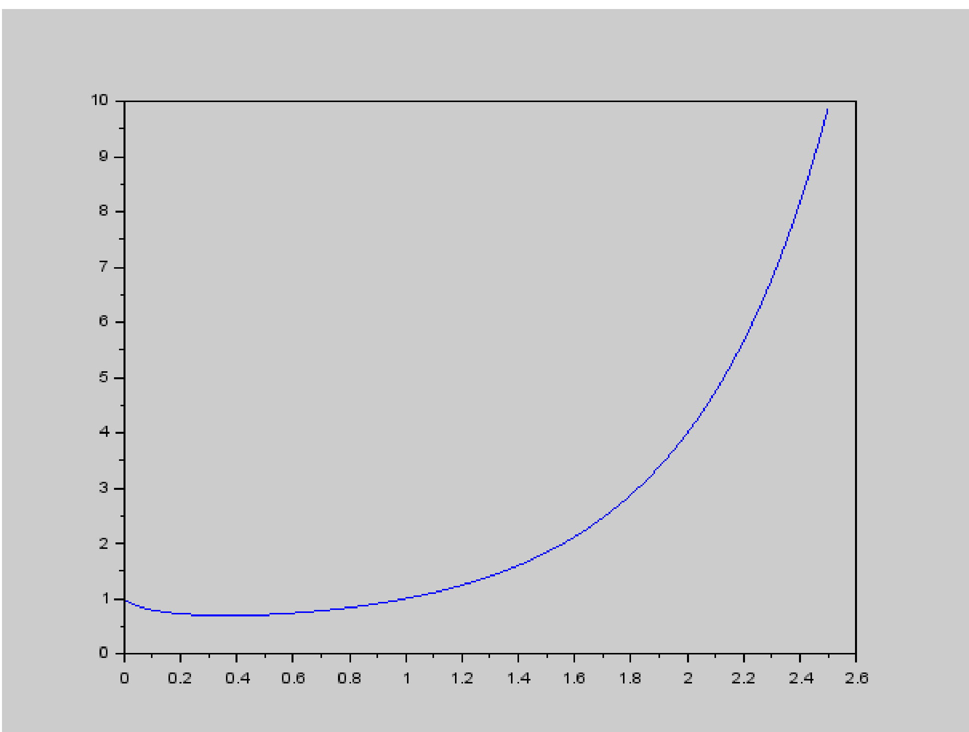
Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f_3(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1$$

D'où le tableau de signes/variations suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	1	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et l'allure du graphe :



Exercice 8.

1. Si $x \leqslant 1$, on a $x^2+1 \leqslant 1$, donc $e^{x^2+1} \leqslant e > 1 \leqslant x$.

   Si $x > 1$, on a $x^2+1 > x > \ln(x)$, donc $e^{x^2+1} > e^{\ln(x)} = x$.

2. Comme la fonction f est définie par un logarithme, elle est définie si et seulement si $e^{x^2+1} - x > 0$, ce qui est le cas pour tout réel x par la question précédente.

3. On a, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{(e^{x^2+1} - x)'}{e^{x^2+1} - x} = \frac{2xe^{x^2+1} - 1}{e^{x^2+1} - x}$$

4. Calculons la dérivée seconde de f :

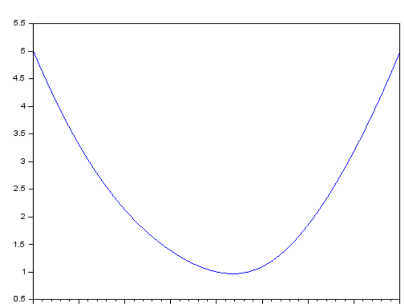
$$f''(x) = \frac{-(2xe^{x^2+1} - 1)^2 + (2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1})(e^{x^2+1} - x)}{(e^{x^2+1} - x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2e^{2(x^2+1)} + 4xe^{x^2+1} - 1 + e^{2(x^2+1)}(2+4x^2) - e^{x^2+1}(2x+4x^3)}{(e^{x^2+1} - x)^2}$$

$$= \frac{2e^{2(x^2+1)} + e^{x^2+1}(2x - 4x^3)}{(e^{x^2+1} - x)^2}$$

$$= \frac{e^{x^2+1}(x(2-4x^2) + 2e^{x^2+1})}{(e^{x^2+1} - x)^2}$$

   Cette dérivée seconde a clairement le signe de $x(2-4x^2) + 2e^{x^2+1}$.
   Il est clair que si $x < 0$ alors $2xe^{x^2+1} < 0$ et donc $f'(x) \neq 0$, de même si $x > 1$, on a $2xe^{x^2+1} > 1$ et donc $f'(x) \neq 0$. Donc si f' s'annule, c'est dans l'intervalle $[0,1]$, or sur cet intervalle, on a $x(2-4x^2) \geqslant -2$ et $2e^{x^2+1} \geqslant 2e$, donc f'' y est toujours strictement positive et f' y est toujours strictement croissante. Or $f'(0) = -1/e < 0$ et $f'(1) = (2e^2-1)/(e^2-1) > 0$, donc f' s'annule en un unique point par le théorème des valeurs intermédiaires.
   Comme $f'(1/2) > 0$, le point d'annulation se trouve dans l'intervalle $[0,1/2]$.
   Comme $f'(1/4) > 0$, le point d'annulation se trouve dans l'intervalle $[0,1/4]$.
   Comme $f'(1/8) < 0$, le point d'annulation se trouve dans l'intervalle $[1/8,2/8]$.
   Comme $f'(3/16) > 0$, le point d'annulation se trouve dans l'intervalle $[3/16,4/16]$.
   Une valeur approché du point d'annulation à $1/16$ près est $7/32$, le milieu de l'intervalle $[3/16,4/16]$.



5.

Session 2 (2016-2017).

1. La fonction f étant définie par une racine, elle est définie si et seulement si $x^2+x-2 \geqslant 0$, on a :
$$\Delta = 1 - 4 \times -2 = 9$$
donc les deux racines de ce trinôme sont données par
$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$
Donc la fonction f est définie sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

2. La fonction dérivée de f est donnée par :
$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$
et est valable sur $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

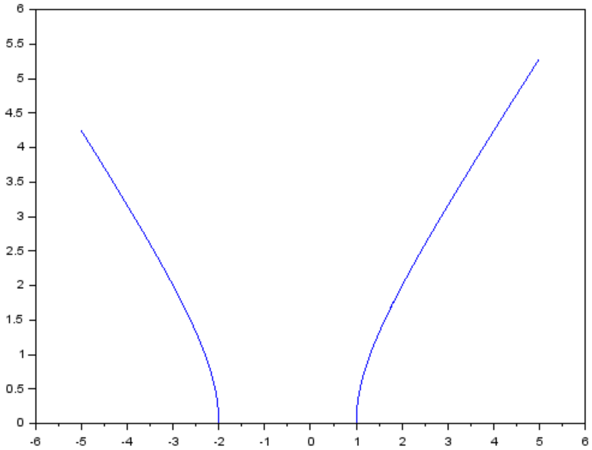
3. Comme $\lim_{x\to+\infty} x^2+x-2 = \lim_{x\to+\infty} x^2+x-2 = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Et $f(-2) = \sqrt{4-2-2} = 0$ et $f(1) = \sqrt{1+1-2} = 0$.

4. Soit x dans le domaine de définition de f, on a :
$$f(-1-x) = \sqrt{(-1-x)^2-1-x-2} = \sqrt{1+2x+x^2-1-x-2} = \sqrt{x^2+x-2} = f(x)$$
On a donc $f(-1/2-x) = f(-1-(-1/2-x)) = f(-1/2+x)$, donc le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1/2$.

5. Le signe de f' est clairement celui de $2x+1$, c'est à dire positif si et seulement si $x \geqslant -1/2$. D'où le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -2 & & 1 & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & | & & | & & +\infty \\
f(x) & & \searrow & | & & | & \nearrow & \\
 & & & 0 & & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

6. On a
$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+x-2}-(x+1/2)\right) &= \frac{\sqrt{x^2+x-2}^2-(x+1/2)^2}{\sqrt{x^2+x-2}+(x+1/2)} \\
&= \frac{x^2+x-2-x^2-x-1/4}{\sqrt{x^2+x-2}+(x+1/2)} \\
&= \frac{-9/4}{\sqrt{x^2+x-2}+(x+1/2)}
\end{aligned}$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-(x+1/2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-9/4}{\sqrt{x^2+x-2}+(x+1/2)} = 0$$
On peut en déduire que le graphe de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $x+1/2$.



7. On a $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2+x-2} = 0^+$, donc $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x\to 1^+} 2x+1 = 3 > 0$.
8. Graphe de f

Contrôle continu 2014-2015

1. On a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+\ln(x^8)}{3^x+x^{78}} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{1+\frac{\ln(x^8)}{2^x}}{1+\frac{x^{78}}{3^x}}$$
Or, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\ln(x^8)}{2^x}}{1+\frac{x^{78}}{3^x}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(2/3)} = 0$$
car $\ln(2/3) < 0$, donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+\ln(x^8)}{3^x+x^{78}} = 0$$
2. On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x^2}\right) = +\infty$

Contrôle continu 2014-2015.

1. La fonction f s'exprime sous la forme $\sqrt{g(x)}$ avec $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$, la fonction f est définie si et seulement si g est définie et positive, donc le domaine de f est inclus dans $\mathbb{R}\setminus -1$, voyons ensuite le signe de $g(x)$. On a $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, et pour le signe de x^2-3x+2, on a :
$$\Delta = 9-8 = 1$$
Les racines de ce trinôme sont dont données par
$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$
D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le domaine de définition de f est donc donné par $]-1,1]\cup[2,+\infty[$.

2. On a $\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.
   On a $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.
   On a $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$.
   On a $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
3. La fonction g est dérivable sur tout son domaine de définition, donc f est dérivable sur $]-1,1[\cup]2,+\infty[$, avec

$$g'(x) = \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-3x+2x-3-x^2+3x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$$

   Par la formule de dérivation des composées, on a donc

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2}\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

4. On a $9>6>4$ donc $3>\sqrt{6}>2$, ainsi, on a $2>-1+\sqrt{6}>1$ et $-1-\sqrt{6}<-1$, donc $-1-\sqrt{6}$ et $-1-\sqrt{6}$ ne sont pas dans le domaine de définition de f.
5. Le signe de $f'(x)$ est clairement donné par celui du trinôme x^2+2x-5, on a

$$\Delta = 4+20 = 24 = 4\times 6 \ \text{ donc } \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$$

   Les deux racines du trinôme sont donc données par

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{2} = -1-\sqrt{6} \ \text{ et } \ x_2 = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} = -1+\sqrt{6}$$

   D'où le tableau de variations suivant :

x	-1		1	2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

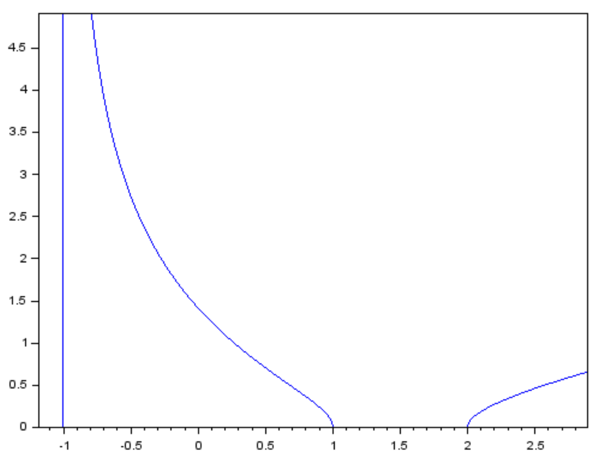
6. On a

$$x-a+\frac{6}{x+1} = \frac{(x-a)(x+1)+6}{x+1} = \frac{x^2+(1-a)x-a+6}{x+1}$$

   Donc $x-a+\frac{6}{x+1} = g(x)$ si et seulement si $1-a=-3$ et $-a+6=2$, ce qui donne dans les deux cas $a=4$.
7. En passant par la quantité conjugée, on obtient

$$f(x)-\sqrt{x-4} = \frac{g(x)-x+4}{f(x)+\sqrt{x-4}} = \frac{x-4+\frac{6}{x+1}-x+4}{f(x)+\sqrt{x-4}} = \frac{6}{(x+1)(f(x)+\sqrt{x-4})}$$

   Qui admet clairement 0 pour limite en $+\infty$.
8. Par la question précente, on peut dire qu'ils tendent asymptotiquement l'un vers l'autre.
9.



4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5