UPJV 2018-2019

UFR Sciences

Feuille 5

Méthodes et techniques de calcul

† *Calcul d'intégrales.*

Exercice I(N1)

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (3t^2 + 2t - 1)dt$, $\int_0^\pi sin(2t)dt$, $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+4}dt$

$\int_0^2 x^2 + e^x - sin(x)dx$, $\int_0^\pi sin(x)dx$, $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx$

Exercice II(N1)

En utilisant une ou plusieurs intégrations par partie calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (2x+1)e^x dx$, $\int_0^\pi (x+4)sin(x)dx$, $\int_0^4 (x^2+x+1)e^x dx$, $\int_{-2}^2 x^2 e^{2x} dx$,

$\int_0^{\sqrt{3}} Arctg(x)dx$, $\int_0^{\pi/2} sin^2(x)$, $\int_1^2 ln(x)dx$, $\int_1^2 x^2 ln(x)dx$

Exercice III(N1)

En utilisant les changements de variable indiqués calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 e^x sin(e^x)dx \quad (t = e^x)$, $\int_0^{\pi/4} \frac{cos(x)}{sin^3(x)}dx \quad (t = sin(x))$

$\int_1^2 \frac{sin(ln(x))}{x}dx \quad (t = ln(x)$, $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{Arctg(x)}{1+x^2}dx \quad (t = Arctg(x))$

$\int_0^{\pi/2} sin(sin(x))cos(x)dx \quad (t = sin(x))$, $\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx \quad (t = e^x)$

Exercice IV

1) Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$$

a) Quel est le domaine de définition de f?

Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

b) Calculer $\int_0^1 f(t)dt$

2) Soit g la fonction définie par la formule

$$g(x) = \frac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$$

a) Quel est le domaine de définition de g?

Montrer que $g(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{e}{x-1}$$

b) Calculer $\int_0^{(1/2)} g(t)dt$

† *Exercices théoriques*

Exercice V(N2)

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.
On pose $f^+(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ et $f^+(x) = 0$ sinon
et
$f^-(x) = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$ et $f^-(x) = 0$ sinon.
On admettra que f^+ et f^- sont continues sur $\mathbf{R}$.
1) Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$
2) Soit $a < b$ deux réels. Exprimer $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b |f(x)|dx$ à l'aide de $\int_a^b f^+(x)dx$ et de $\int_a^b f^-(x)dx$.
3) En déduire que $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Exercice VI (N3)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$,$(a < b)$ et satisfaisant

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice VII (N3)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b)$. Montrer que si $\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0$ et qu'en au moins un point f est strictement positive alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.
(*On utilisera la définition théorique de la continuité*)

Exercice VIII (N3)

Pour l'entier non nul n on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$
1) Expliquer pourquoi cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
2) Exprimer $I_{n+1}(x)$ à l'aide de $I_n(x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
3) Donner les expressions (sans utiliser le symbole $\int$) de $I_1(x), I_2(x)$ et $I_3(x)$.

Exercice IX(N2)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$de $\mathbf{R}$, on suppose que pour tout $t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$.
Montrer que $m \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq M$

Exercice X(N2)

1) En utilisant la relation de Chasles et un changement de variable

a) Montrer que si une fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ et impaire alors pour tout réel $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

b) Montrer que si une fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ et paire alors pour tout réel $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

c) Montrer que si une fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ et périodique de période T, alors pour tout réel a

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Exercice XI(N3)

Soit f une fonction continue et convexe sur l'intervalle $[a, b]$.

Comparer $\int_a^b f(t)dt$ et $\frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$.

Que pouvez vous dire de la fonction f si ces deux quantités sont égales?

† *Applications aux sciences*

Exercice XII (aires)

L'aire algébrique entre une courbe représentant la fonction f et l'axe des abscisses entre l'abscisse a et l'abscisse b est $\int_a^b f(t)dt$.

Avec un tout petit peu d'initiative on peut utiliser cela pour calculer l'aire (non algébrique) de surface comprise entre deux courbes..

1) Calculer l'aire comprise entre les paraboles d'équation

$(P_1) : y = x^2 - 8x + 14$ et $(P_2) : y = -x^2 - 4x + 15$

2) Calculer l'aire comprise entre les courbes représentant

$f(x) = sin(x)cos(x)$ et $g(x) = sin(x)$; $0 \leq x \leq \pi$

Exercice XIII (position, vitesse et accélération)

Lorsqu'un objet se déplace le long d'un axe, une fois cet axe muni d'un repère, si on note $x(t)$ son abscisse à l'instant t, la vitesse à l'instant t, $v(t)$, est la dérivée de x en t et l'accélération à l'instant t, $a(t)$ est la dérivée de la vitesse. La loi de Newton dit que la masse d'un objet, la somme des forces auxquelles il est soumis et son accélération sont liés par la relation $F = ma$

1) Un objet de masse m, immobile à l'instant t_0 est soumis à une force constante F et ce à partir de l'instant t_0. Exprimer à l'aide de sa masse et du temps sa vitesse à l'instant t.

Exprimer la distance totale parcourue entre l'instant t_0 et l'instant t.

2) Un objet est soumis a se déplacer sur une droite avec une accélération $a(t) = cos(\pi t)$ sa vitesse à l'instant $t = 0$ vaut $\frac{1}{2\pi}$

Exprimer la distance totale parcourue et la distance nette parcourue entre l'instant 0 et l'instant t. Calculer sa vitesse moyenne.

Exercice XIV (position d'équilibre d'une barre)

1) Une barre de masse négligeable est posée sur un appui ponctuel, elle porte à ces deux extrémités d'un coté une masse ponctuelle de 3 kg de l'autre une masse ponctuelle de 12 kg la barre mesure 2 mètres où doit on placer l'appui pour que la barre reste horizontale?

2) Une poutre métallique repose sur un support ponctuel on choisti comme axe des abscisses la droite horizontale passant par le support, les extrémités de la barre lorsqu 'elle est horizontale sont à l'abscisse 20 et à l'abscisse 30, sa densité est donnée par $s(x) = x - 19$. Quelle est l'abcsisse du support si la barre reste horizontale? (On rappelle que la barre reste horizontale lorsque le moment est nul).