UPJV
UFR des Sciences

L1S1 - Méthodes et techniques de calcul
Louis Pernas - Arthur Garnier

Feuille 5

Exercice I.

On peut calculer directement les primitives à l'aide des primitives usuelles (à connaître par cœur !) vues en cours.

- On a
$$\int_0 (3t^2 + 2t - 1)\mathrm{d}t = [t^3 + t^2 - t]_0^1 = 1.$$
- On a
$$\int_0^\pi \sin(2t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(2t)}{t}\right]_0^\pi = 0.$$
- On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto t^2 + t + 4$, donc on peut écrire
$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+4}\mathrm{d}t = [\ln(|t^2 + t + 4|)]_1^2 = \ln(10) - \ln(6) = \ln\frac{5}{3}.$$
- On utilise la linéarité de l'intégrale pour écrire
$$\int_0^2 (t^2 + e^t - \sin t)\mathrm{d}t = \int_0^2 t^2\mathrm{d}t + \int_0^2 e^t\mathrm{d}t - \int_0^2 \sin(t)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + [e^t]_0^2 + [\cos(t)]_0^2 = \frac{8}{3} + e^2 - 1 + \cos(2) - \cos(0) = \frac{8}{3} + e^2 + \cos(2) - 2.$$
- On calcule
$$\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = 2.$$
- Enfin, on écrit
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(|t|)]_{-2}^{-1} = -\ln 2.$$

Exercice II.

Dans chaque cas, on donne u et v **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** $[a, b]$ pour appliquer la formule d'intégration par parties (à connaître par cœur et fort utile !)

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

- On pose $u(t) := e^t$ et $v(t) := 2t+1$ pour obtenir

$$\int_0^1 (2t+1)e^t \mathrm{d}t = [(2t+1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t \mathrm{d}t = 3e - 1 - 2\int_0^1 e^t \mathrm{d}t = 3e - 1 - 2(e-1) = e+1.$$

- On pose ici $u(t) := -\cos(t)$ et $v(t) := t+4$ pour obtenir

$$\int_0^\pi (t+4)\sin(t)\mathrm{d}t = [(t+4)(-\cos(t))]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\mathrm{d}t = \pi + 8.$$

- On pose dans un premier temps $u(t) := e^t$ et $v(t) := t^2+t+1$ pour obtenir

$$\int_0^4 (t^2+t+1)e^t \mathrm{d}t = \left[(t^2+t+1)e^t\right]_0^4 - \int_0^4 (2t+1)e^t \mathrm{d}t = 21e^4 - 1 - \int_0^4 (2t+1)e^t \mathrm{d}t.$$

  Pour calculer l'intégrale restante, on effectue à nouveau une intégration par parties avec $u(t) := e^t$ et $v(t) := 2t+1$ et il vient alors

$$\int_0^4 (2t+1)e^t \mathrm{d}t = [(2t+1)e^t]_0^4 - 2\int_0^4 e^t \mathrm{d}t = 9e^4 - 1 - 2(e^4-1) = 7e^4 + 1.$$

  Ainsi,

$$\int_0^4 (2t+1)e^t \mathrm{d}t = 21e^4 - 1 - 7e^4 - 1 = 14e^4 - 2.$$

- On pose dans un premier temps $u(t) := \frac{e^{2t}}{2}$ et $v(t) := t^2$ pour obtenir

$$\int_{-2}^2 t^2 e^{2t} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2 e^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t = 2(e^4 - e^{-4}) - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t = 4\mathrm{sh}(4) - \int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t.$$

  On pose ensuite $u(t) := \frac{e^{2t}}{2}$ et $v(t) := t$ pour effectuer une seconde intégration par parties et obtenir

$$\int_{-2}^2 te^{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 - \frac{1}{2}\int_{-2}^2 e^{2t}\mathrm{d}t = e^4 + e^{-4} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-2}^2 = 2\mathrm{ch}(4) - \frac{\mathrm{sh}(4)}{2},$$

  et donc

$$\int_{-2}^2 t^2 e^{2t}\mathrm{d}t = 4\mathrm{sh}(4) - \left(2\mathrm{ch}(4) - \frac{\mathrm{sh}(4)}{2}\right) = \frac{9}{2}\mathrm{sh}(4) - 2\mathrm{ch}(4).$$

- C'est plus astucieux ici, on pose $u(t) := t$ et $v(t) := \arctan(t)$ pour obtenir

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{3}} 1 \times \arctan(t)\mathrm{d}t = [t\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

  et la dernière intégrale ci-dessus est de la forme $\int \frac{u'}{u}$ et donc il vient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan(t)\mathrm{d}t = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}[\ln(|1+t^2|)]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 4}{2}.$$

- On pose $u(t) := -\cos(t)$ et $v(t) := \sin(t)$ et on écrit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t.$$

On utilise ensuite la formule $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on écrit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

- On pose ici $u(t) := t$ et $v(t) := \ln t$ et on obtient

$$\int_1^2 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

Remarquons qu'au passage, on a montré que la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ *est une primitive de* ln.

- On pose $u(t) := \frac{t^3}{3}$ et $v(t) := \ln(t)$:

$$\int_1^2 t^2\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\ln 2 - \int_1^2 \frac{t^2}{3}\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\ln 2 - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Exercice III.

Dans chaque cas, on laisse le soin au lecteur de vérifier que φ est dérivable sur $]a,b[$ et que $\varphi'(x) > 0$ pour $x \in]a,b[$ où φ est la fonction donnant le changement de variable, de sorte que l'on puisse appliquer le théorème du cours. Un moyen mnémotechnique de retenir la formule

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

dans le bon sens est d'écrie que comme $t = \varphi(x)$, on a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$, soit $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Attention, ce n'est qu'une notation, je n'ai affirmé l'égalité mathématique de deux objets en aucune façon !
En fait, on peut formaliser ce genre d'égalité, avec ce qu'on appelle les "formes différentielles". Elles sont introduites en L3 de Mathématiques. Ce n'est évidemment pas au programme de l'examen.

- Le changement de variable $t = e^x$ donne ($x = 0 \Rightarrow t = 1$ et $x = 1 \Rightarrow t = e$ et $\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = e^{-x}\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$)

$$\int_0^1 e^x\sin(e^x)\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^e \sin(t)\mathrm{d}t = \cos(1) - \cos(e).$$

- La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$ n'est pas définie en 0 et tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$, donc l'intégrale n'existe pas !
- Si $t = \ln x$, alos $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ donc $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$ et donc

$$\int_1^2 \frac{\sin(\ln(x))}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \frac{\sin(t)}{e^t}e^t\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} \sin(t)\mathrm{d}t = 1 - \cos(\ln 2).$$

- Si $t = \arctan x$, alors $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, donc $\mathrm{d}x = (1+x^2)\mathrm{d}t = (1+\tan^2(t))\mathrm{d}t$ et donc

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{1+\tan^2(t)}(1+\tan^2(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

- Le changement de variable $t = \sin(x)$ donne $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin(x))\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(t)\frac{\cos(\arcsin(t))}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{d}t = 1 - \cos(1).$$

- Enfin, le changement de variable $t = e^x$ donne ici

$$\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^e \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$= [\ln(|t^2+t+1|)]_1^e = \ln(e^2+e+1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e^2+e+1}{3}\right).$$

Exercice IV.

1) a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ est définie partout où $x^2-5x+6 \neq 0$. Ce trinôme est de discriminant $\Delta = 1$ et de racines 2 et 3 ; donc f est définie partout sauf en 2 et 3 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\} =]-\infty, 2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[.$$

On décompose ensuite la fraction rationnelle f en éléments simples. Pour ceci, on commence par faire la division euclidienne du polynôme x^2+1 par x^2-5x+6 :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2 - 5x + 6 & x^2 \qquad\quad + 1 \\ & -x^2 + 5x - 6 \\ \hline & 5x - 5 \end{array}$$

d'où

$$x^2+1 = (x^2-5x+6) + 5x - 5$$

et donc

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}.$$

Par le théorème fondamental sur les fractions rationnelles, il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

On a déjà $a = 1$. Pour trouver b, on multiplie l'égalité ci-dessus par $x - 2$ pour obtenir

$$\frac{5x-5}{x-3} + (x-2) = (x-2)f(x) = a(x-2) + b + \frac{c(x-2)}{x-3}.$$

En évaluant cette dernière égalité en $x = 2$ on trouve $b = -5$. De même, en multipliant l'équation ci-dessus par $x - 3$ et en évaluant en $x = 3$, on trouve $c = 10$. Enfin, on calcule que

$$1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3} = \frac{(x-2)(x-3) - 5(x-3) + 10(x-2)}{(x-2)(x-3)} = f(x).$$

b) Grâce á l'expression

$$\forall x \neq 2, 3,\ \ f(x) = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3},$$

on peut calculer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. On écrit

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{5}{t-2} + \frac{10}{t-3}\mathrm{d}t$$

$$= 1 - 5[\ln|t-2|]_0^1 + 10[\ln|t-3|]_0^1 = 1 + 5\ln 2 + 10\ln 2 - 10\ln 3 = 1 + 15\ln 2 - 10\ln 3$$

et finalement

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t = 1 + 15\ln 2 - 10\ln 3.$$

2) a) La fonction $g : x \mapsto \frac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ est définie dès que $(x+1)^2(x-1) \neq 0$, i.e. dès que $x \neq \pm 1$:

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Ensuite, on procède essentiellement de la même façon que précédemment. On écrit

$$\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad x-1 \\ \hline
x^3+x^2-x-1 & x^4 \qquad +x^2 \qquad +1 \\
 & -x^4 - x^3 + x^2 + x \\ \hline
 & \quad -x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 & \quad x^3 + x^2 - x - 1 \\ \hline
 & \quad 3x^2
\end{array}$$

d'où

$$x^4 + x^2 + 1 = (x-1)((x+1)^2(x-1)) + 3x^2$$

et donc

$$g(x) = \frac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(x-1)((x+1)^2(x-1)) + 3x^2}{(x+1)^2(x-1)} = x - 1 + \frac{3x^2}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Par le théorème fondamental des fractions rationnelles, il existe $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{e}{x-1}.$$

Ici, on a déjà $a = 1$ et $b = -1$. Ensuite, pour trouver d on multiplie par $(x+1)^2$ l'égalité ci-dessus et on obtient

$$(x+1)^2(x-1) + \frac{3x^2}{x-1} = (x-1)(x+1)^2 + c(x+1) + d + \frac{e(x+1)^2}{x-1}$$

et en évaluant ceci en $x = -1$, on trouve $d = -\frac{3}{2}$. De même, en multipliant l'égalité par $x - 1$, on a

$$(x-1)^2 + \frac{3x^2}{(x+1)^2} = (x-1)^2 + \frac{c(x-1)}{x+1} + \frac{d(x-1)}{(x+1)^2} + e.$$

Évaluant ceci en $x = 1$, il vient alors $e = \frac{3}{4}$. Il ne nous reste quà trouver c. Cette fois-ci, multiplier l'égalité par $x + 1$ ne fonctionne pas, à cause du facteur en $\frac{1}{(x+1)^2}$. On peut tout redévelopper, puis identifier terme à terme, mais c'est long ! On va plutôt utiliser les limites. Multiplier l'égalité par $x + 1$ donne

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{3}{2(x+1)} = (x+1)g(x) + \frac{3}{2(x+1)} = c + (x^2 - 1) + \frac{3(x+1)}{4(x-1)}$$

Ainsi, en prenant la limite quand $x \to -1$, il vient

$$c = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1}\left(\frac{3}{2} + \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{3}{2(x+1)}$$

Pour calculer cette limite, on écrit la division euclidienne de $x^4 + x^2 + 1$ par $x^2 - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline -x^4 + x^2 & x^2 + 2 \\ 2x^2 + 1 & \\ -2x^2 + 2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

d'où

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) + 3.$$

De cela, on tire

$$c = \lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{3}{2(x+1)} = \lim_{x \to -1} x^2 + 2 + \frac{3}{x^2 - 1} + \frac{3}{2(x+1)}$$

$$= 3\left(1 + \lim_{x \to -1} \frac{1+x}{2(x^2-1)}\right) = 3\left(1 + \lim_{x \to -1} \frac{1}{2(x-1)}\right) = \frac{9}{4}$$

et donc, $c = \frac{9}{4}$. Finalement, on a obtenu

$$\forall x \neq \pm 1, \ \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} = g(x) = x - 1 + \frac{9}{4(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{3}{4(x-1)}.$$

b) On peut utiliser cette expressions pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\mathrm{d}t$ comme suit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} (t-1)\mathrm{d}t + \frac{9}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{4}[\ln(|t+1|)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}[\ln(|t-1|)]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{9}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - 1\right) - \frac{3}{4}\ln 2 = -\frac{7}{8} + \frac{9}{4}\ln 3 - 3\ln 2,$$

d'où, finalement

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^4+t^2+1}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{7}{8} + \frac{9}{4}\ln 3 - 3\ln 2.$$

Exercice V.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et distinguons deux cas. Si $f(x) \geq 0$, alors $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$, donc $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$. Si $f(x) \leq 0$, alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$ et donc $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$. Dans tous les cas, on a bien $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $f(x) \geq 0$, alors $|f(x)| = f(x) = f^+(x) = f^+(x) + f^-(x)$. Si $f(x) \leq 0$, alors $|f(x)| = -f(x) = f^-(x) = f^-(x) + f^+(x)$. Dans les deux cas, on a bien $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Au passage, on a montré que $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$.
2) La linéarité de l'intégrale et ce qui précède permetten d'écrire

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t) - f^-(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t.$$

De même, on trouve que

$$\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t.$$

3) Enfin, la positivité de f^+ et f^- et l'inégalité triangulaire classique donnent

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$= \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Exercice VI.

On fait le changement de variable $y = a+b-x$ dans l'intégrale (et alors $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$) pour obtenir

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a (a+b-y)f(a+b-y)\mathrm{d}y = (a+b)\int_a^b f(y)\mathrm{d}y - \int_a^b yf(y)\mathrm{d}y,$$

ce qui entraîne

$$2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et donc

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice VII.

Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme f est continue en x_0 on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset [a,b],\ f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Ceci dit, comme f est positive, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(t)\mathrm{d}t > \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}t = 2\eta\frac{f(x_0)}{2} = \eta f(x_0) > 0$$

et donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0.$$

Exercice VIII.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives, donc l'intégrale

$$I_n(x) := \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2)^n}$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, elle définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la primitive de f_n qui s'annule en 0 et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

2) C'est astucieux ! On écrit

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} + \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}} + \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) + \int_0^x \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) := \frac{1}{-n(1+t^2)^n}$ et $v(t) := \frac{t}{2}$ pour obtenir

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{-x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\left(I_n(x) - \frac{x}{(1+x^2)^n}\right).$$

Finalement, on a obtenu

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_n(x) = I_{n+1}(x) + \frac{1}{2n}\left(I_n(x) - \frac{x}{(1+x^2)^n}\right)$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}.$$

3) Pour I_1 on a une primitive qui est $t \mapsto \arctan(t)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x).$$

Ensuite, on peut utiliser la relation de récurrence prouvée ci-dessus et écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_2(x) = \frac{1}{2}I_1(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)}.$$

De même, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_3(x) = \frac{3}{4}I_2(x) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} = \frac{3\arctan(x)}{8} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2}.$$

Exercice IX.

Par définition, on a

$$\forall t \in [a,b],\ m \leq f(t) \leq M$$

et en intégrant cette inégalité sur $[a,b]$, on obtient par positivité de l'intégrale

$$m(b-a) = \int_a^b m\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b M\mathrm{d}t = M(b-a)$$

donc

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M,$$

d'où le résultat.

La quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est appelée "valeur moyenne de* f *sur* $[a,b]$*". Elle permet de définir proprement la notion de moyenne en théorie des probabilités.*

Exercice X.

a) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue impaire et $a > 0$. Par changement de variable ($t = -x$), on a

$$\int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la relation de Chasles donne

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{a} \underbrace{(f(t) + f(-t))}_{=0}\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

b) De même ici si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue paire et $a > 0$, le changement de variable $t = -x$ donne

$$\int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

et, en utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{a} \underbrace{(f(t) + f(-t))}_{=2f(t)}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

c) Ça peut paraître évident, mais ça ne l'est pas ! Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. et soit $a \in \mathbb{R}$. Supposons tout d'abord que $a \in \mathbb{Z}T$ (i.e. a est un multiple entier de T). Le changement de variable $x = t - a$ permet d'écrire

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(x+a)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x+nT)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ensuite, si a n'est pas multiple entier de T, alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT \in [a, a+T]$ (prendre $n := E\left(\frac{a}{T}\right)$ avec E la partie entière). La relation de Chasles donne alors

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{nT} f(t)\mathrm{d}t + \int_{nT}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

Puis, en effectuant le changement de variable $x = t + T$ dans la première intégrale, on trouve

$$\int_{a}^{nT} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{(n+1)T} f(x+T)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{(n+1)T} f(x)\mathrm{d}x,$$

donc, en appliquant à nouveau la relation de Chasles,

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{nT}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t,$$

où la dernière égalité provient du cas où a est un multiple entier de T. Ceci achève la démonstration.

Exercice XI.

C'est un exercice difficile. Rappelons que l'on dit d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'elle est *convexe* si on a

$$\forall x, y \in [a, b],\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

En particulier ici, on a

$$\forall t \in [0, 1],\ f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Ceci étant, on calcule

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \int_a^b \left(f(t) - \frac{f(a) + f(b)}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 (tf(b) + (1-t)f(a))\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 f((1-t)a + tb) - (tf(b) + (1-t)f(a))\mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité de convexité ci-dessus, on en tire

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \int_0^1 \underbrace{f((1-t)a + tb) - ((1-t)f(a) + tf(b))}_{\leq 0} \leq 0$$

d'où

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Étudions maintenant le cas d'égalité. Comme la fonction

$$t \mapsto f((1-t)a + tb) - ((1-t)f(a) + tf(b))$$

est continue et négative sur $[0, 1]$, l'exercice VII assure que si son intégrale est nulle, alors elle est identiquement nulle, i.e.

$$\forall 0 \leq t \leq 1,\ f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b),$$

ou encore

$$\forall 0 \leq t \leq 1,\ f(a + t(b-a)) = f(a) + t(f(b) - f(a)).$$

Il reste à identifier les fonctions vérifiant ceci. Tout d'abord, on va voir que de telles fonctions sont dérivables sur $]a, b[$. Soit $x \in]a, b[$ que l'on écrit $x = a + t(b-a)$ pour un certain $t \in [0, 1]$. Soit $h > 0$ tel que $x + h \in [a, b]$. Le réel $x + h$ s'écrit lui aussi $x + h = a + t'(b-a)$. Trouvons t'. On a

$$a + t(b-a) + h = x + h = a + t'(b-a) \ \Rightarrow\ (t' - t)(b-a) = h \ \Rightarrow\ t' = t + \frac{h}{b-a}.$$

Ensuite, on calcule

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(a+t'(b-a))-f(a+t(b-a))}{h}$$

$$=\frac{f(a)+t'(f(b)-f(a))-f(a)-t(f(b)-f(a))}{h}=\frac{t'-t}{h}(f(b)-f(a))=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ceci étant vrai pour tout $h>0$ tel que $x+h\in[a,b]$, on en déduit alors que

$$\forall x\in]a,b[,\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ainsi, f est dérivable sur $]a,b[$ et on a

$$\forall x\in]a,b[,\ f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ainsi, f s'écrit

$$\forall x\in[a,b],\ f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+c,\ c\in\mathbb{R},$$

autrement dit, f est une fonction affine. Réciproquement, si $f:x\mapsto\lambda x+\mu$ est affine, alors on a bien

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b(\lambda t+\mu)\mathrm{d}t=\lambda\frac{b^2-a^2}{2}+\mu(b-a)=\frac{b-a}{2}(\lambda(a+b)+2\mu)=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

Finalement, les seules fonctions convexes vérifiant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ sont les fonctions affines.
Le fait d'approcher l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ d'une fonction continue f sur $[a,b]$ par le nombre $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ est une des nombreuses méthodes d'intégration numérique. On l'appelle "formule des trapèzes". Le but de cette discipline est de calculer des valeurs approchées de quantités difficiles (voire impossible) à calculer explicitement, comme par exemple l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

tout en estimant au mieux l'erreur commise par l'approximation. On peut montrer (c'est difficile !) que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors il existe $\xi\in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

Une formule encore meilleure est celle de Simpson :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\approx\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

L'obtention et l'étude de ces formules est menée en L2 de mathématiques, dans le cours d'analyse numérique. Encore une fois, rien de tout cela ne sera à l'examen.

Exercice XII.

1) Calculons l'aire comprise entre les courbes d'équations $y = x^2 - 8x + 14$ et $y = -x^2 - 4x + 15$ entre les réels a et $b > a$. Elle s'écrit

$$\left|\int_a^b (t^2 - 8t + 14) - (-t^2 - 4t + 15)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b 2t^2 - 4t - 1\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - t\right]_a^b\right| = (b-a)\left|\frac{2}{3}(a^2 + ab + b^2) - 2(a+b) - 1\right|.$$

2) De même, on calcule

$$\left|\int_0^\pi g(t) - f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi \sin(t) - \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi \sin(t)(1 - \cos(t))\mathrm{d}t\right|.$$

En faisant une intégration par parties, on trouve que

$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = [\sin^2(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

soit

$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$\left|\int_0^\pi \sin(t)(1 - \cos(t))\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t\right| = |[-\cos(t)]_0^\pi| = 2.$$

Exercice XIII.

1) Comme on a $F = ma(t)$, on peut trouver la vitesse v par intégration de l'accélération et obtenir

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s = \frac{F}{m}(t - t_0) + v_0 = \frac{F}{m}(t - t_0).$$

Ensuite, on peut encore intégrer pour obtenir

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(s)\mathrm{d}s = \frac{F}{m}\int_{t_0}^t (s - t_0)\mathrm{d}s = \frac{F}{m}\int_0^{t-t_0} s\mathrm{d}s = \frac{F}{2m}(t - t_0)^2.$$

2) Si $a(t) = \cos(\pi t)$ et $v_0 = \frac{1}{2\pi}$, alors on a d'après ce qui précède

$$v(t) = \int_0^t a(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \cos(\pi s)\mathrm{d}s = \frac{\sin(\pi t)}{\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

De même, on en tire

$$x(t) = \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{t}{2\pi} + x_0 = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{t}{2\pi}.$$

On en déduit en particulier la vitesse moyenne de l'objet entre les instants 0 et t :

$$\overline{v} = \frac{1}{t}\int_0^t v(s)\mathrm{d}s = \frac{x(t)}{t} = \frac{1-\cos(\pi t)}{t\pi^2} + \frac{1}{2\pi}.$$

Exercice XIV.

1) Nous n'avons pas besoin d'intégrale pour résoudre ce problème. On cherche le centre de gravité (ou barycentre) de la barre. Si l'on note A le point de masse $3kg$, B l'autre point de masse $12kg$ et G leur centre de gravité, alors, comme on doit avoir la relation

$$3\overrightarrow{GA} + 12\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

soit, en supposant que l'abscisse de A est nulle, que celle de B vaut 2 et que celle de G vaut $g \in [0, 2]$, alors il vient

$$3(0-g) + 12(2-g) = 0 \;\Rightarrow\; 24 = 15g \;\Rightarrow\; g = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Ceci est cohérent puisque dans ce cas la distance entre A et G vaut $1.6 = 4 \times 0.4$ qui vaut quatre fois la distance entre G et B. Ainsi, le point d'équilibre est situé à $1,6$ mètre de la masse de $3kg$.

2) C'est la même idée mais cette fois la densité linéique n'est plus homogène, on a donc besoin du calcul intégral : on cherche $u \in [20, 30]$ tel que

$$\int_{20}^{u} (x-19)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{20}^{30} (x-19)\mathrm{d}x$$

i.e. en posant $y = x - 19$ dans les deux intégrales,

$$\int_1^{u-19} 2y\mathrm{d}y = \int_1^{11} y\mathrm{d}y$$

ou encore

$$(u-19)^2 - 1 = \frac{11^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{120}{2} = 60.$$

Ceci entraîne $(u-19)^2 = 61$ donc $u - 19 = \sqrt{61}$ et donc l'abscisse du support doit être

$$u = 19 + \sqrt{61} \approx 26.81.$$