Feuille 6

Exercice I.

Rappelons que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

s'écrivent

$$y : x \mapsto ke^{G(x)},\ k \in \mathbb{R}$$

avec G une primitive de $-\frac{b(t)}{a(t)}$. Dans la suite, pour désigner que F est une primitive de f, on écrira $F(x) = \int f(t)\mathrm{d}t$. Attention, ce n'est qu'une notation et en aucun cas une égalité mathématique !
Dans ce qui suit, la méthode est toujours la même : on commence par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec la méthode de "variation de la constante".

- L'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$2y' + 3y = x^2 + x + 1$$

s'écrit

$$2y' + 3y = 0.$$

Ses solutions s'écrivent $y_h(x) = ke^{-\frac{3}{2}t}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation, on pourrait utiliser la méthode de variation de la constante, mais ici comme c'est un polynôme, on peut la chercher sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et comme y_p doit vérifier l'équation, on doit avoir

$$x^2 + x + 1 = 2y_p' + 3y_p = 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c$$

d'où

$$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{9},\ c = \frac{11}{27}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-\frac{3}{2}t} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{9} + \frac{11}{27},\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation

$$y' + 2y = (x^3 + 1)e^{x^2}$$

admet pour équation homogène

$$y' + 2y = 0$$

dont les solutions sont les $y_h(x) = ke^{-2x}$. Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on suppose que y_p s'écrit $y_p(x) = k(x)e^{-2x}$ avec k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule

$$(x^3+1)e^{x^2} = y_p' + 2y_p = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x} + 2k(x)e^{-2x} = k'(x)e^{-2x},$$

d'où $k'(x) = (x^3+1)e^{x^2+2x} = (x^3+1)e^{x(x+2)}$ et donc $k(x) = \int_0^x (t^3+1)e^{t(t+2)}\mathrm{d}t$. On en déduit que les solutions de l'équation s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-2t}\left(k + \int_0^x (t^3+1)e^{t(t+2)}\mathrm{d}t\right),\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation homogène associée à

$$y' + y = \sin(x) - \cos(x)$$

est

$$y' + y = 0$$

dont les solutions sont

$$y_h(x) = k^e - x,\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante : $y_p(x) = k(x)e^{-x}$ et on a

$$\sin(x) - \cos(x) = y_p' + y_p = k'(x)e^{-x},$$

d'où $k'(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^x$. En faisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} k(x) = \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t &= [(\sin(t) - \cos(t))e^t]_0^x - \int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t \\ &= (\sin(x) - \cos(x))e^x + 1 - \int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puis, en effectuant de nouveau une intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^x (\cos(t) + \sin(t))e^t\mathrm{d}t &= [(\cos(t) + \sin(t))e^t]_0^x - \int_0^x (\cos(t) - \sin(t))e^t\mathrm{d}t \\ &= (\cos(x) + \sin(x))e^x - 1 + \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t = 2 - 2\cos(x)e^x - \int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^x (\sin(t) - \cos(t))e^t\mathrm{d}t = 1 - \cos(x)e^x.$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto (\sin(x) - \cos(x))e^x$ est donnée par $x \mapsto -\cos(x)e^x$. On en déduit les solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + k(x)e^{-x} = ke^{-x} - \cos(x)e^{-x}e^x = ke^{-x} - \cos(x),\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

- L'équation homogène associée à l'équation

$$y' + xy = x$$

est

$$y' + xy = 0$$

Ses solutions s'écrivent

$$y_h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour le solution particulière, on peut utilise la variation de la constante, ou bien remarquer tout simplement que la fonction constante égale à 1 est une solution particulière. Les solutions de l'équation sont donc les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

- Ici, l'équation homogène associée à

$$y' + 3x^2y = 6x^2$$

est donnée par

$$y' + 3x^2y = 0$$

et ses solutions s'écrivent

$$y_h(x) = ke^{-x^3},\ k \in \mathbb{R}.$$

On remarque ensuite que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation et on obtient alors toutes les solutions :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-x^3} + 2,\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation différentielle

$$y' + e^{-x}y = xe^{e^{-x}}$$

admet pour équation homogène

$$y' + e^{-x}y = 0$$

et ses solutions s'écrivent

$$y_h(x) = ke^{e^{-x}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on fait varier la constante : $y_p(x) = k(x)e^{e^{-x}}$ et on écrit

$$xe^{e^{-1}} = y_p(x)' + e^{-x}y_p(x) = k'(x)e^{e^{-x}},$$

d'où $k'(x) = x$ et donc $k(x) = \frac{x^2}{2}$. Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(k + \frac{x^2}{2}\right)e^{e^{-x}},\ k \in \mathbb{R}.$$

- L'équation homogène associée à l'équation différentielle
$$(1+x^2)y' - y = e^{\arctan(x)}$$
est
$$(1+x^2)y' - y = 0$$
et ses solutions sont
$$y_h(x) = ke^{\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}} = ke^{\arctan(x)}, \ k \in \mathbb{R}.$$
Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on écrit, avec $y_p(x) = k(x)e^{\arctan(x)}$,
$$e^{\arctan(x)} = (1+x^2)y_p'(x) - y_p(x)$$
$$= (1+x^2)k'(x)e^{\arctan(x)} + k(x)e^{\arctan(x)} - k(x)e^{\arctan(x)} = (1+x^2)k'(x)e^{\arctan(x)},$$
d'où $k'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $k(x) = \arctan(x)$. Ainsi, les solutions de l'équation s'écrivent
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = (k + \arctan(x))e^{\arctan(x)}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice III.

1) La fonction $A : x \mapsto x\ln(x) - x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ A'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$
Ainsi, A est une primitive de ln.
2) Soit l'équation différentielle homogène
$$y' - \ln(x)y = 0 \tag{EH}$$
On cherche les solutions de EH sur $\mathbb{R}_+^*$. On a
$$y_h(x) = ke^{\int \ln(t)\mathrm{d}t} = ke^{A(x)} = ke^{x\ln(x)-x} = kx^xe^{-x}, \ k \in \mathbb{R}.$$
3) Posons $y_p(x) := K(x)e^{x\ln(x)-x}$ pour $K : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si y_p est solution de l'équation
$$y' - \ln(x)y = xe^{x\ln(x)-x} \tag{E}$$
alors on a
$$xe^{x\ln(x)-x} = y_p'(x) - \ln(x)y_p(x) = K'(x)e^{x\ln(x)-x}$$
d'où $K'(x) = x$ et $K(x) = \frac{x^2}{2}$. Une solution de (E) est donc
$$y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{x\ln(x)-x}.$$
4) C'est du cours ! Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $y - y_p$ est solution de (EH) sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc y s'écrit
$$\forall x > 0, \ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(k + \frac{x^2}{2}\right)e^{x\ln(x)-x} = \left(k + \frac{x^2}{2}\right)x^xe^{-x}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice IV.

1) La fonction $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2) Soit l'équation différentielle

$$(x+1)y' - (x+2)y = x(x+1)e^x \tag{E}$$

Pour la résoudre sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on doit calculer une primitive de $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$, donc I ne soit pas contenir -1. Les plus grands tels intervalles sont $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$. Ce sont donc les deux intervalles sur lesquels les méthodes de résolution s'appliquent.
3) Résolvons d'abord (E) sur $]-1, +\infty[$. Sur cet intervalle, l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = xe^x.$$

L'équation homogène associée est alors

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = 0.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$\forall x > -1,\ y_h(x) = ke^{\int \frac{t+2}{t+1}\mathrm{d}t} = ke^{\int 1+\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t} = ke^{x+\ln|x+1|} = ke^{x+\ln(x+1)} = k(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}$$

Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante ; on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = k(x)(x+1)e^x$ et on écrit

$$xe^x = y_p'(x) - \frac{x+2}{x+1}y_p(x) = k'(x)(x+1)e^x$$

d'où $k'(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ et donc $k(x) = x - \ln|x+1| = x - \ln(x+1)$. Les solutions de (E) sur $]-1, +\infty[$ s'écrivent donc

$$\forall x > -1,\ y(x) = (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite (E) sur $]-\infty, -1[$. L'équation homogène

$$y' - \frac{x+2}{x+1}y = 0$$

admet pour solutions

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = ke^{x+\ln|x+1|} = ke^{x+\ln(-x-1)} = -k(x+1)e^x,\ k \in \mathbb{R}$$

ou encore, en posant $\widetilde{k} := -k$:

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = \widetilde{k}(x+1)e^x.$$

Pour la solution homogène, on utilise la variation de la constante : $y_p(x) = \widetilde{k}(x)(x+1)e^x$ et on écrit

$$xe^x = y_p'(x) - \frac{x+2}{x+1}y_p(x) = \widetilde{k}'(x)(x+1)e^x$$

d'où $\widetilde{k}'(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ et donc $\widetilde{k}(x) = x - \ln|x+1| = x - \ln(-x-1)$. Ainsi, les solutions de (E) sur $]-\infty, -1[$ s'écrivent

$$\forall x < -1,\ y(x) = (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x,\ \widetilde{k} \in \mathbb{R}.$$

4) Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors par ce qui précède, il doit exister $k, \widetilde{k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ y(x) = \begin{cases} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x & \text{si} \quad x < -1 \\ (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

La fonction y doit être définie et continue en -1. On calcule

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = \lim_{x \to -1^-} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))(x+1)e^x = 0$$

ainsi que

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = \lim_{x \to -1^+} (k + x - \ln(x+1))(x+1)e^x = 0$$

ces deux limites étant calculées par croissances comparées (i.e. en utilisant $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$). Ainsi, pour que y soit continue en -1, il faut poser $y(-1) = 0$. Il faut ensuite que y soit dérivable en -1. On calcule

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} (\widetilde{k} + x - \ln(-x-1))e^x = +\infty.$$

Ceci montre que y ne peut être dérivable en -1, donc qu'il n'existe pas de solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$: l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E) est donc l'ensemble vide.

Exercice V.

a) Soit l'équation

$$(x-1)(x+1)y' - (3x+1)y = 3(x-1)^2 \tag{E}$$

On peut la résoudre sur tous les intervalles ne contenant pas ± 1. Les plus grands tels intervalles sont $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$. On va résoudre (E) sur chacun de ces intervalles. Remarquons que sur chacun de ces intervalles, l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}y = 3\frac{x-1}{x+1} \tag{E'}$$

et son équation homogène associée est alors

$$y' - \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}y = 0 \tag{EH'}$$

- Sur $]-\infty, -1[$, l'équation (EH') admet pour solutions

$$\forall x < -1,\ y_h(x) = ke^{\int \frac{3t+1}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t},\ k \in \mathbb{R}.$$

  On doit alors calculer une primitive de $t \mapsto \frac{3t+1}{(t-1)(t+1)}$. Pour cela, on décompose cette fraction rationnelle en éléments simples

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

On peut multiplier les deux membres de cette égalité par $x-1$ et évaluer en $x=1$ pour obtenir $a=2$ et de même, on a $b=1$ et

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit que

$$\int \frac{3t+1}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = 2\ln|x-1| + \ln|x+1|.$$

Ici, comme $x<-1$, on a $x-1<0$ et $x+1<0$, d'où

$$\forall x<-1,\ y_h(x) = ke^{2\ln|x-1|+\ln|x+1|} = ke^{2\ln(1-x)+\ln(-x-1)} = -k(1-x)^2(x+1),\ k\in\mathbb{R},$$

ou encore, en remplaçant k par $-k$:

$$\forall x<-1,\ y_h(x) = k(x+1)(1-x)^2,\ k\in\mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on écrit

$$3\frac{x-1}{x+1} = y_p'(x) - \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}y_p(x) = k'(x)(1-x)^2(x+1)$$

d'où $k'(x) = \frac{3}{(x-1)(x+1)^2}$. Là encore, il nous faut décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples

$$\frac{3}{(1+x)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{x-1}.$$

Avec la même méthode que précédemment, on trouve $b=-\frac{3}{2}$ et $c=\frac{3}{4}$. Pour trouver a, on écrit

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-1} \frac{3(1+x)}{(1+x)^2(x-1)} - \frac{b(1+x)}{(1+x)^2} - \frac{c(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to-1} \frac{3}{(1+x)(x-1)} + \frac{3}{2(1+x)} \\ &= \lim_{x\to-1} \frac{6+3(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{3(x+1)}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{3}{2(x-1)} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{3}{(1+x)^2(x-1)} = -\frac{3}{4(1+x)} - \frac{3}{2(1+x)^2} + \frac{3}{4(1-x)}.$$

On en tire que

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \frac{3}{(1+t)^2(t-1)}\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}\ln|1+x| + \frac{3}{2(1+x)} + \frac{3}{4}\ln|x-1| \\ &= -\frac{3}{4}\ln(-x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x). \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E') sur $]-\infty,-1[$ s'écrivent

$$\forall x<-1,\ y_1(x) = \left(-\frac{3}{4}\ln(-x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_1\right)(1-x)^2(x+1),\ k_1\in\mathbb{R}.$$

- On procède de même sur $]-1,1[$ en faisant attention aux changements de signes dans les logarithmes. Les solutions de (EH') sur $]-1,1[$ s'écrivent toujours

$$\forall x \in]-1,1[,\ y_h(x) = \widetilde{k}(1-x)^2(1+x),\ \widetilde{k} \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante, on trouve que $\widetilde{k}'(x) = \frac{3}{(1+x)^2(x-1)}$ et, avec la décomposition vu ci-dessus, cela donne

$$\begin{aligned} \widetilde{k}(x) &= -\frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln|1-x| \\ &= -\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x). \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E') sur $]-1,1[$ s'écrivent

$$\forall -1 < x < 1,\ y_2(x) = \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_2\right)(1-x)^2(x+1),\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

- On utilise toujours le même procédé : les solutions de (EH') sur $]1,+\infty[$ s'écrivent

$$\forall x > 1,\ y_h(x) = \widetilde{\widetilde{k}}(1-x)^2(1+x),\ \widetilde{\widetilde{k}} \in \mathbb{R}.$$

Puis, en utilisant la variation de la constante, on trouve la solution particulière $y_p(x) = \widetilde{\widetilde{k}}(x)(1-x)^2(1+x)$ avec

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{k}}(x) &= -\frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln|1-x| \\ &= -\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x-1). \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E') sur $]1,+\infty[$ s'écrivent

$$\forall x > 1,\ y_3(x) = \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x-1) + k_3\right)(1-x)^2(x+1),\ k_3 \in \mathbb{R}.$$

On a ainsi résolu l'équation (E) sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. Il nous reste à voir qi l'on peut recoller ces solutions en -1 et en 1, de sorte à ce qu'elles soient définies sur $\mathbb{R}$. Supposons donc qu'on ait une solution y de (E), définie sur $\mathbb{R}$. Par ce qui précède, il doit exister $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \neq \pm 1,\ y(x) = 3(1-x)^2(x+1) \times \begin{cases} -\frac{1}{4}\ln(-x-1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{k_1}{3} & \text{si} \quad x < -1 \\ -\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{k_2}{3} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{k_3}{3} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Tout d'abord, on doit déterminer les valeurs possibles de y en ± 1. On calcule, à l'aide de l'expression de y donnée ci-dessus,

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = 6 = \lim_{x \to -1^+} y(x)$$

ainsi que

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} y(x).$$

Donc, pour que y soit continue sur $\mathbb{R}$, on doit poser $y(-1) = -6$ et $y(1) = 0$ et donc, y s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2(x+1)\left(-\frac{1}{4}\ln(-x-1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{k_1}{3}\right) & \text{si} \quad x < -1 \\ 6 & \text{si} \quad x = -1 \\ 3(1-x)^2(x+1)\left(-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{k_2}{3}\right) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ 3(1-x)^2(x+1)\left(-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{k_3}{3}\right) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

La fonction y ainsi obtenue doit également être dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Il reste à voir si elle est d'erivable en -1 et en 1. On calcule

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{y(x) - y(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{y(x) - 6}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \left(-\frac{3}{4}\ln(-x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_1\right)(1-x)^2 - \frac{6}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \left(-\frac{3}{4}\ln(-1-x) + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{6}{(x+1)(x-1)^2} - \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_1\right)(1-x)^2 = -\infty$$

Ceci montre que y ne peut être dérivable en -1 ; on ne peut donc pas recoller les solutions en -1. Pour un éventuel recollement en 1, on calcule

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{y(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_2\right)(x-1)^2(1+x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k_2\right)(x-1)(x+1) = 0$$

Cette fois-ci, un recollement est probable. On calcule également

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{y(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x-1) + k_3\right)(x-1)^2(1+x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x-1) + k_3\right)(x-1)(x+1) = 0$$

Ainsi, dans tous les cas on obtient

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = 0,$$

donc y est dérivable en 1 et on a $y'(1) = 0$. Finalement, l'équation (E) admet des solutions sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ qui s'écrivent respectivement

$$\forall x < -1,\ y(x) = \left(-\frac{3}{4}\ln(-x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + k\right)(x-1)^2(x+1),$$

et

$$\forall x > -1,\ y(x) = \begin{cases} \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(1-x) + \ell_1\right)(x-1)^2(x+1) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ \left(-\frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\ln(x-1) + \ell_2\right)(x-1)^2(x+1) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

pour $k, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Cependant, l'équation (E) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

b) Cette équation est un peut moins effrayante !

$$\frac{1}{x}y' - y = 2 - x^2 \tag{E}$$

On peut la résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Son équation homogène associée est

$$\frac{1}{x}y' - y = 0 \tag{EH}$$

- Sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$, les solutions de (EH) s'écrivent

$$\forall x < 0,\ y_h(x) = ke^{\frac{x^2}{2}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on utilise la variation de la constante et on trouve

$$2 - x^2 = \frac{1}{x}y_p'(x) - y_p(x) = \frac{k'(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{x}$$

d'où $k'(x) = x(2-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$. On effectue une intégration par parties (en posant $u(t) := e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v(t) := t$) pour trouver k :

$$\begin{aligned} k(x) = \int_0^x k'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x (-t)(t^2-2)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left[(t^2-2)e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x - 2\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\ &= (x^2-2)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 + 2\int_0^x (-t)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = (x^2-2)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 + 2\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x \\ &= (x^2-2)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ s'écrivent

$$\forall x < 0,\ y_1(x) = k_1e^{\frac{x^2}{2}} + x^2,\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de (EH) s'écrivent

$$\forall x > 0,\ y_h(x) = \widetilde{k}e^{\frac{x^2}{2}},\ \widetilde{k} \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on procède de la même manière que ci-dessus et on obtient que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent

$$\forall x > 0,\ y_2(x) = k_2e^{\frac{x^2}{2}} + x^2,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

Si y est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, alors il doit exister $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \neq 0,\ y(x) = \begin{cases} k_1 e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ k_2 e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

La fonction y doit être continue en 0, on doit donc avoir

$$k_1 = \lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = k_2$$

et donc $k_1 = k_1 = y(0)$. Ainsi, y doit s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} + x^2.$$

On remarque que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation (E). Finalement, l'équation (E) admet les fonctions suivantes comme solutions définies sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} + x^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice VI.

- On considère le problème de Cauchy (i.e. l'équation différentielle avec conditions initiales) suivant :

$$\begin{cases} (x^2+1)y' - 2y = xe^{2\arctan(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{P}$$

L'équation ne pose de problème nulle-part et on peut la résoudre sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est

$$y' - \frac{2}{x^2+1} y = 0$$

et ses solutions s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{2\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, la méthode de la variation de la constante donne, en écrivant $y_p(x) = k(x)e^{2\arctan(x)}$:

$$xe^{2\arctan(x)} = (x^2+1)y_p'(x) - 2y_p(x) = (x^2+1)k'(x)e^{2\arctan(x)}$$

d'où $k'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et donc $k(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation de (P) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} + k \right) e^{2\arctan(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, si on veut $y(0) = 1$, alors

$$1 = y(0) = \left(\frac{\ln(0^2+1)}{2} + k \right) e^{2\arctan(0)} = k.$$

Donc l'unique solution au problème (P) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} + 1 \right) e^{2\arctan(x)}.$$

- Soit le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l}(x+1)y'+y=x^2\\ y(0)=0\end{array}\right. \qquad \text{(P)}$$

L'équation pose problème en $x=-1$, on va donc la résoudre sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,+\infty[$ et voir si l'on peut recoller les solutions. L'équation homogène associée est

$$(x+1)y'+y=0.$$

$*$ Sur $]-\infty,-1[$, les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$\forall x<-1,\ y_h(x)=ke^{-\ln(-x-1)}=\frac{-k}{x+1},\ k\in\mathbb{R}.$$

Ensuite, pour la solution particulière, on applique la variation de la constante et on obtient

$$x^2=(x+1)\frac{k'(x)}{x+1}$$

d'où $k'(x)=x^2$ et donc $k(x)=\frac{x^3}{3}$. Ainsi les solutions de l'équation sur $]-\infty,-1[$ s'écrivent

$$\forall x<-1,\ y_1(x)=\frac{k_1-x^3}{3(x+1)},\ k_1\in\mathbb{R}.$$

$*$ Sur $]-1,+\infty[$, on procède de même (en faisant attention aux signes dans les logarithmes !) et on trouve que les solutions de l'équation sur $]-1,+\infty[$ s'écrivent

$$\forall x>-1,\ y_2(x)=\frac{k_2-x^3}{3(x+1)},\ k_2\in\mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{x\to-1^-}y(x)=\lim_{x\to-1^-}y_1(x)=\left\{\begin{array}{cl}+\infty & \text{si } k_1<-1\\ -1 & \text{si } k_1=-1\\ -\infty & \text{si } k_1>-1\end{array}\right.$$

et

$$\lim_{x\to-1^+}y(x)=\lim_{x\to-1^+}y_2(x)=\left\{\begin{array}{cl}-\infty & \text{si } k_2<-1\\ -1 & \text{si } k_2=-1\\ +\infty & \text{si } k_2>-1\end{array}\right.$$

Comme on veut une solution maximale (i.e. définie sur le plus grand intervalle possible contenant 0), y doit admettre une limite en -1 : on doit avoir $k_1=k_2=-1$ et alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\left\{\begin{array}{cl}-\frac{1+x^3}{3(x+1)} & \text{si } x\neq-1\\ -1 & \text{si } x=-1\end{array}\right.$$

Dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to-1}\frac{y(x)-y(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^3+3x+2}{3(1+x)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{2-x}{3}=1$$

d'où $y'(-1)=1$ et la fonction y est alors solution de l'équation. Cependant, on a $y(0)=-\frac{1}{3}\neq0$, donc y ne répond pas au problème posé. On doit donc considérer uniquement la solution y_2 sur $]-1,+\infty[$ (car cet intervalle contient 0), qui est maximale puisqu'on a

$$\lim_{x\to-1^+}|y_2(x)|=+\infty$$

car $k_2 \neq -1$. Enfin, pour qu'on ait $y(0) = 0$, on doit avoir $k_2 = 0$ et donc, la solution maximale au problème posé est définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\forall x > -1, \; y(x) = -\frac{x^3}{3(x+1)}.$$

- Soit enfin le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - x\ln(x)y = 1 - x^2\ln(x) \\ y(2) = e^{2\ln 2} = 4 \end{cases} \tag{P}$$

On résout l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation homogène associée est

$$y' - x\ln(x)y = 0$$

et ses solutions s'écrivent

$$\forall x > 0, \; y_h(x) = ke^{\int t\ln(t)\mathrm{d}t}, \; k \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\int_1^x t\ln(t)\mathrm{d}t$, on utilise une intégration par parties (avec $u(t) := \frac{t^2}{2}$ et $v(t) := \ln(t)$) :

$$\int_1^x t\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + \frac{1}{4}$$

d'où

$$\forall x > 0, \; y_h(x) = ke^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)}, \; k \in \mathbb{R}.$$

Pour la solution particulière, on peut utiliser la variation de la constante, ou bien remarquer que la fonction $y_p(x) = x$ est aussi solution particulière. Ainsi, les solutions de l'équation de (P) sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent

$$\forall x > 0, \; y(x) = ke^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x, \; k \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, si on veut $y(2) = 4$, on doit avoir

$$4 = y(2) = ke^{\frac{4}{4}(2\ln(2)-1)} + 2 = k\left(\frac{4}{e}\right) + 2$$

d'où $k = \frac{2e}{4} = \frac{e}{2}$ et donc la solution de (P) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \; y(x) = \frac{e}{2}e^{\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x = \frac{1}{2}e^{1+\frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)} + x.$$

Exercice VII.

Soit l'équation différentielle

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{B}$$

1) L'équation (B) est linéaire si, dès qu'on a un couple de solutions (f,g) de (B), alors $f+\lambda g$ est encore solution et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici, on a

$$(f+\lambda g)' + P(x)(f+\lambda g) = f' + P(x)f + \lambda(g' + P(x)g) = Q(x)f^n + \lambda g^n$$

et ceci doit être égal à $Q(x)(f+\lambda g)^n$. Si Q n'est pas identiquement nulle, on doit avoir $f^n + \lambda g^n = (f+\lambda g)^n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui ne peut arriver que si $n = 1$. Ainsi, l'équation (B) est linéaire si et seulement si $n = 1$.

2) Supposons $n > 1$ et soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de (B) qui ne s'annule jamais et posons $z := y^{1-n}$. Comme y ne s'annule jamais, z est bien définie, dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I,\ z'(x) = (1-n)y(x)^{-n}y'(x) = \frac{(1-n)y'(x)}{y(x)^n}.$$

Comme y est solution de (B), ceci entraîne

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ z'(x) &= (1-n)\frac{y'(x)}{y(x)^n} = (1-n)\frac{Q(x)y(x)^n - P(x)y(x)}{y(x)^n}\\ &= (1-n)(Q(x) - P(x)y(x)^{1-n}) = (1-n)(Q(x) - P(x)z(x)).\end{aligned}$$

Ainsi, z est solution sur I de l'équation différentielle

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x).$$

3) Nous allons appliquer la question précédente. On reconnaît une équation de la forme de (B) avec $P(x) = Q(x) = 1$ pour tout x et $n = 3$. On suppose que y est une solution de l'équation

$$y' + y = y^3$$

sur un intervalle I, partout non nulle et on pose $z := y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$. Par la question précédente, z vérifie l'équation différentielle

$$-\frac{1}{2}z' + z = 1$$

ou encore

$$z' - 2z = -2.$$

L'équation homogène associée est

$$z' - 2z = 0$$

et ses solutions sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z_h(x) = ke^{2x},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on remarque que la fonction constante égale à 1 est solution particulière de l'équation et donc les solutions de cette équation sont les

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = ke^{2x} + 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on retrouve y via la relation $y = \sqrt{\frac{1}{z}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{\sqrt{ke^{2x}+1}},\ k \in \mathbb{R}_+^*.$$

(On prend $k > 0$ pour s'assurer que ce qui est sous la racine reste bien strictement positif.)

Les équations différentielle du type $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ (avec $n > 1$) sont appelées "équations de Bernoulli".

Exercice VIII.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dérivable et considérons l'équation différentielle

$$h(x)y' + h'(x)y = xh'(x) \tag{E}$$

Comme h ne s'annule jamais, l'équation homogène associée est

$$y' + \frac{h'(x)}{h(x)}y = 0. \tag{EH}$$

et ses solutions sont données par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_h(x) = ke^{-\int \frac{h'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t} = ke^{-\ln|h(x)|} = \frac{k}{h(x)},\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on emplie la méthode de variation de la constante et on prend $y_p(x) = \frac{k(x)}{h(x)}$ pour obtenir

$$xh'(x) = h(x)y_p'(x) + h'(x)y_p(x) = k'(x)$$

d'où $k'(x) = xh'(x)$. Pour trouver k, on intègre par parties :

$$\int_1^x th'(t)\mathrm{d}t = [th(t)]_1^x - \int_1^x h(t)\mathrm{d}t$$

et, si H désigne une primitive de h (qui existe puisque h est continue, car dérivable), on obtient

$$\int th'(t)\mathrm{d}t = xh(x) - H(x).$$

Ainsi, les solutions de (E) s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{k + xh(x) - H(x)}{h(x)} = x + \frac{k - H(x)}{h(x)},\ k \in \mathbb{R},$$

avec H une primitive de h. Quitte à remplacer k par $k+H(0)$, on peut supposer que $H(0) = 0$ et H est alors unique. Ensuite, si l'on veut que $y(0) = a \in \mathbb{R}$, alors

$$a = y(0) = \frac{k - H(0)}{h(0)} = \frac{k}{h(0)} \ \Rightarrow\ k = ah(0).$$

Finalement, la solution de (E) valant a en 0 est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = x + \frac{ah(0) - H(x)}{h(x)},$$

où H est l'unique primitive de h s'annulant en 0.

Exercice IX.

1) Notons $Q(t)$ la quantité de substance radioactive à l'instant t. La décroissance de la quantité de substance à l'instant t est représentée par $Q'(t)$ et est proportionnelle à $Q(t)$: disons $Q'(t) = \alpha Q(t)$ et α est négatif car la quantité de substance est supposée décroître. Ainsi, l'équation différentielle recherchée est la suivante

$$Q' + \alpha Q = 0,\ \ \alpha > 0.$$

2) On résout l'équation

$$Q' + kQ = 0.$$

Ses solutions sont données par

$$\forall t \geq 0,\ \ Q(t) = Q(0)e^{-kt}.$$

Comme $k > 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} Q(0)e^{-kt} = 0,$$

donc la définition de limite et le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence de $t_0 > 0$ tel que $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$. Ce t_0 est appelé la *demi-vie* de la substance. Pour trouver t_0, on résout l'équation $Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2}$:

$$Q(0)e^{-kt_0} = Q(t_0) = \frac{Q(0)}{2} \ \Rightarrow\ e^{-kt_0} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ kt_0 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \ \Rightarrow\ t_0 = \frac{\ln 2}{k}$$

et on a bien $Q\left(\frac{\ln 2}{t_0}\right) = Q(0)e^{-k\frac{\ln 2}{k}} = Q(0)e^{-\ln 2} = \frac{Q(0)}{2}$. Ainsi, la demi-vie t_0 est donnée par

$$t_0 = \frac{\ln 2}{k}.$$

3) Si la substance a une demi-vie de 10 jours, alors par ce qui précède, le coefficient k vaut

$$k = \frac{\ln 2}{10}.$$

Dire qu'il y a 28 mg de cette substance à l'instant initial signifie que $Q(0) = 28$. On doit alors résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q' + \frac{\ln 2}{10}Q = 0 \\ Q(0) = 28 \end{cases}$$

Comme on l'a vu ci-dessus, la solution est donnée par

$$\forall t \geq 0,\ \ Q(t) = 28e^{-\frac{\ln 2}{10}t}.$$

Si l'on cherche combien il reste de substance au bout de 8 jours, on calcule alors simplement

$$Q(8) = 28e^{-\frac{\ln 2}{10}\times 8} = 28e^{-\frac{4\ln 2}{5}} = 28e^{-\frac{\ln 16}{5}} = \frac{28}{\sqrt[5]{16}}$$

Au bout de 8 jours, il reste donc $\frac{28}{\sqrt[5]{16}} \approx 16.1$ mg de substance.

Exercice X.

Notons $f(t)$ la concentration en saumure à l'instant t (on compte le temps en secondes ici). Fixons un instant $t > 0$ et considérons un "petit" pas de temps h. D'après l'énoncé, entre les les instants t et $t+h$, on a retiré $10hf(t)$ grammes de saumure et on en a rajouté $10 \times 5h$. Ainsi, on a retiré $\frac{10hf(t)}{1000}$ g/L à la concentration et on en a ajouté $\frac{50h}{1000}$. Autrement dit, on a

$$f(t+h) = f(t) + \frac{-10hf(t) + 50h}{1000} = f(t) + h\frac{5 - f(t)}{100}.$$

En prenant la limite quand $h \to 0$, on trouve

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5 - f(t)}{100} = \frac{5 - f(t)}{100}.$$

Ainsi, f est dérivable et on a

$$\forall t > 0,\ f'(t) = \frac{5 - f(t)}{100}$$

et f vérifie alors l'équation différentielle

$$100f' + f = 5.$$

L'équation homogène associée est

$$100f' + f = 0$$

de solutions

$$\forall t > 0,\ f_h(t) = ke^{-\frac{t}{100}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, la fonction constante égale à 5 est solution particulière et par suite, les solutions de l'équation s'écrivent

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = ke^{-\frac{t}{100}} + 5,\ k \in \mathbb{R}.$$

Mais, comme on sait que $f(0) = 20$, on a $k = 15$ et donc

$$\forall t \geq 0,\ f(t) = 5(1 + 3e^{-\frac{t}{100}}).$$

Si l'on veut savoir au bout de combien de temps la concentration est de 10 grammes par litre, on résout

$$f(t) = 10 \ \Rightarrow\ 1 + 3e^{-\frac{t}{100}} = 2 \ \Rightarrow\ e^{-\frac{t}{100}} = \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \frac{t}{100} = \ln 3 \ \Rightarrow\ t = 100\ln 3$$

et réciproquement, $f(100\ln(3)) = 10$, donc la concentration est de 10 grammes par litre au bout de $100\ln 3 \approx 109,86$ secondes, soit environ 1 minute et 50 secondes.

Exercice XI.

1) Il suffit de résoudre l'équation $x'' = g$ et pour cela, on intègre

$$x'(t) = \int_0^t g\mathrm{d}s = gt$$

et on intègre encore

$$x(t) = \int_0^s x'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t gs\mathrm{d}s = \frac{1}{2}gt^2,$$

d'où

$$\forall t \geq 0,\ x(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

2) Il s'agit d'intégrer le PFD : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\overrightarrow{a}$ qui donne ici $mx''(t) = gm - kv(t)$ soit $x''(t) = g - \frac{k}{m}x'(t)$. Ainsi, x satisfait bien l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\forall t \geq 0,\ x''(t) = g - \frac{k}{m}x'(t).$$

Posons $y := x'$. La fonction y vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + \frac{k}{m}y = g.$$

Son équation homogène associée est

$$y' + \frac{k}{m}y = 0$$

qui admet pour solutions

$$\forall t \geq 0,\ y(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on remarque que la fonction constante égale à $\frac{mg}{k}$ est une solution particulière de l'équation et on obtient alors toutes ses solutions :

$$\forall t \geq 0,\ y(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, comme $v_0 = x'(0) = y(0)$, on a $v_0 = \lambda + \frac{mg}{k}$ d'où $\lambda = v_0 - \frac{mg}{k}$ et donc

$$\forall t \geq 0,\ x'(t) = y(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Il ne reste qu'à trouver une primitive de y pour trouver x. On obtient

$$\forall t \geq 0,\ x(t) = x(0) + \frac{mgt}{k} + \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{m}{k}\left(\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} + gt\right).$$

Exercice XII.

1) L'équation différentielle

$$P' = kP$$

admet pour solutions les

$$\forall t \geq 0,\ P(t) = ce^{kt},\ c \geq 0.$$

Ces fonctions ont l'allure suivante :

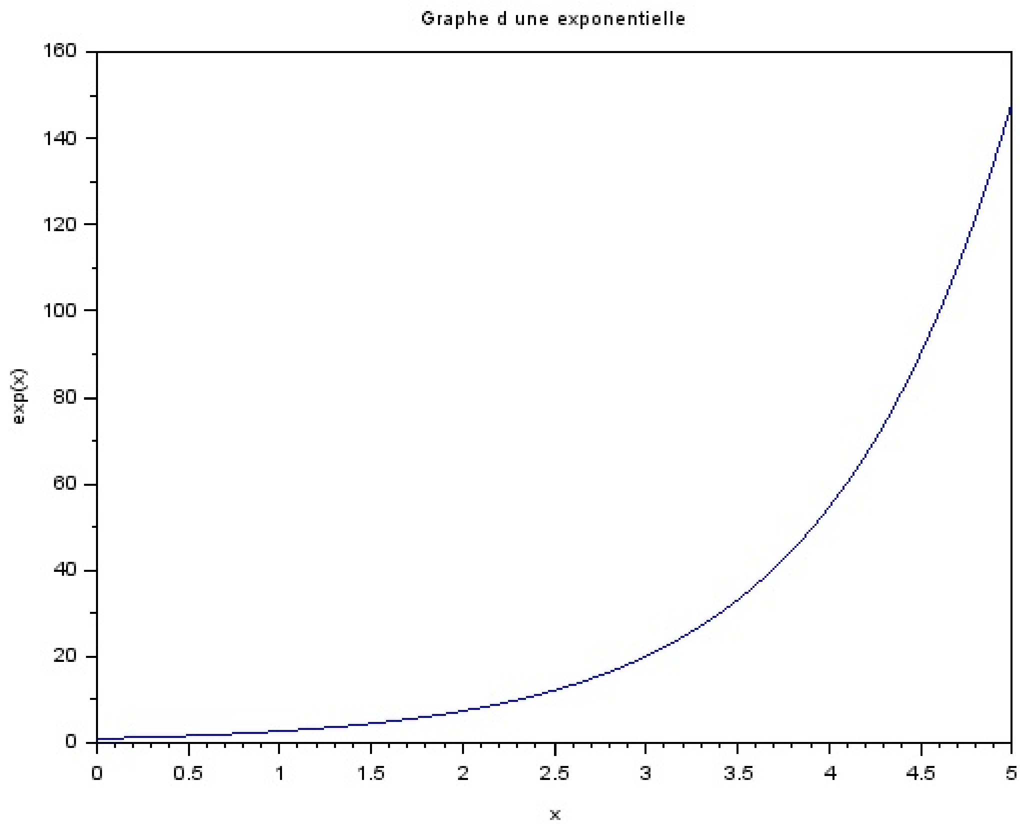

Figure 0.1 – Allure du graphe d'une fonction exponentielle

Cette courbe signifie que la population explose au court du temps. Bien évidemment, ce modèle n'est pas réaliste dans le cas des poissons.
Pour ce qui est d'une situation représentable par ce modèle, on peut imaginer une ville sans chats ni pièges à rat : la population de rats explose (un peu comme sous l'inquisition au XIII$^{\text{ème}}$ siècle...)

2) a) On cherche donc à résoudre l'équation différentielle

$$P' = 2(1-P)P. \tag{E}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f() = \frac{1}{x(1-x)}$ est facile : on a

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, les primitives de f existent sur les intervalles $)-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. En notant F une primitive de f sur chacun des intervalles, on a

$$\forall x < 0,\ F(x) = \ln(-x) - \ln(1-x) + k_1,$$

$$\forall 0 < x < 1,\ F(x) = \ln(x) - \ln(1-x) + k_2,$$

$$\forall 1 < x,\ F(x) = \ln(x) - \ln(x-1) + k_3,$$

où k_1, k_2, k_3 sont des réels arbitraires.

b) Soit ensuite P une solution de l'équation (E), que l'on suppose non constante. Alors $P(t)$ n'est jamais égal à 0 ou 1 ; et on admet ceci.
On peut le montrer sans même connaître P, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui est totalement hors programme. Il faut juste considérer qu'on peut le démontrer. On peut s'en convaincre en regardant l'équation dans les yeux : si à un moment donné t_0 on a $P(t_0) \in \{0,1\}$, alors $P'(t_0) = 0$ et ceci se propage, entraînant $P' \equiv 0$ et donc P est constante égale à 1 ou 0.
Considérons la fonction $u : t \mapsto \ln\left|\frac{P(t)}{1-P(t)}\right| = \ln|P(t)| - \ln|1-P(t)|$. Cette fonction est bien définie puisque $P(t)$ ne vaut jamais 0 ni 1 et est dérivable, de dérivée

$$t \mapsto u'(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{P'(t)}{1-P(t)} = \frac{P'(t)}{P(t)(1-P(t))} = \frac{P'(t)}{\frac{P'(t)}{2}} = 2.$$

Ainsi, la fonction u s'écrit

$$u : t \mapsto 2t + \lambda$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc

$$\forall t \geq 0,\ \ln\left|\frac{P(t)}{1-P(t)}\right| = 2t + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Rappelons-nous que si P n'est pas constante, alors elle ne vaut jamais 0 ni 1. Si $P(0) = 1$, alors P est constante égale à 1 :

$$\forall t \geq 0,\ P(t) = 1.$$

Si $P(0) = \frac{1}{2} \in]0,1[$, alors on a toujours $0 < P(t) < 1$ et, par ce qui précède, on a

$$\forall t \geq 0,\ \ln\left(\frac{P(t)}{1-P(t)}\right) = 2t + \lambda \ \Rightarrow\ \frac{P(t)}{1-P(t)} = \mu e^{2t}$$

avec $\mu = e^{\lambda} > 0$ d'où $P(t) = \mu(1 - P(t))e^{2t}$ et donc $P(t) = \frac{\mu e^{2t}}{1+\mu e^{2t}} = \frac{1}{1+ae^{-2t}}$, avec $a = \frac{1}{\mu} > 0$. De plus, comme $P(0) = \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{1+a} = \frac{1}{2}$ donc $a = 1$ et donc

$$\forall t \geq 0,\ P(t) = \frac{1}{1 + e^{-2t}}.$$

Ensuite, si $P(0) = 2 > 1$, alors on a toujours $P(t) > 1$ et, toujours par ce qui précède, on a

$$\forall t \geq 0,\ \ln\left(\frac{P(t)}{P(t) - 1}\right) = 2t + \lambda \ \Rightarrow\ \frac{P(t)}{P(t) - 1} = \mu e^{2t}$$

avec $\mu = e^{\lambda} > 0$. Ainsi, on a $P(t) = \mu(P(t) - 1)e^{2t}$ donc $P(t) = \frac{\mu e^{2t}}{\mu e^{2t}-1} = \frac{1}{1-ae^{-2t}}$ avec $a = \frac{1}{\mu} > 0$. De plus, comme $P(0) = 2$, on a $\frac{1}{1-a} = 2$ d'où $a = \frac{1}{2}$ et donc

$$\forall t \geq 0,\ P(t) = \frac{2}{2 - e^{-2t}}.$$

Pour résumer, on a obtenu

$$\forall t \geq 0,\ P(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{-2t}} & \text{si} \quad P(0) = \frac{1}{2} \\ \quad 1 & \text{si} \quad P(0) = 1 \\ \frac{2}{2-e^{-2t}} & \text{si} \quad P(0) = 2 \end{cases}$$

Il nous reste à tracer les graphes correspondants. Nous allons noter $P_{1/2}$ (resp. P_1, P_2) la première (resp. la deuxième, la troisième) fonction ci-dessus. On a

$$\forall t \geq 0,\ P'_{1/2}(t) = \frac{2e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2} > 0$$

donc $P_{1/2}$ est strictement croissante et on a $\lim_{t\to+\infty} P_{1/2}(t) = 1$. Enfin, la tangente en 0 est d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$. De même, on a

$$\forall t \geq 0,\ P'_2(t) = \frac{-4e^{-2t}}{(2 - e^{-2t})^2} < 0$$

donc P_2 est strictement décroissante et on a $\lim_{t\to+\infty} P_2(t) = 1$. Enfin, la tangente en 0 est d'équation $y = -4x + 2$. On en déduit les graphes suivants, qui nous indiquent qu'il s'agit d'un modèle plus raisonnable :

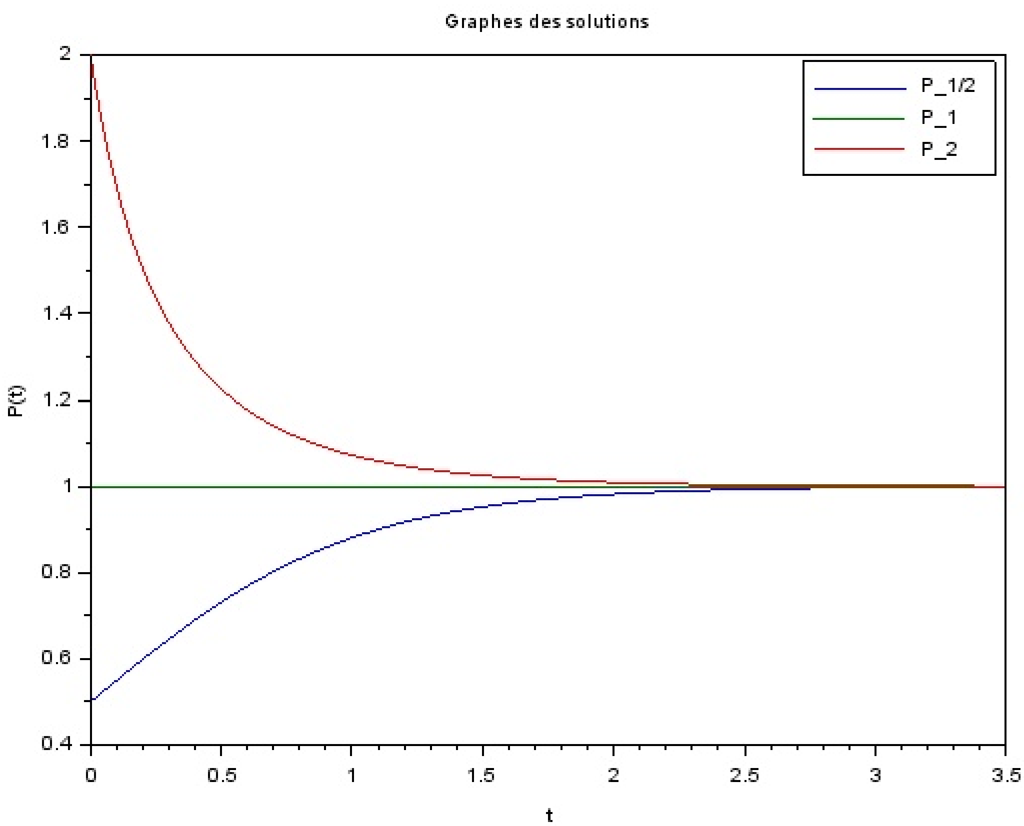

FIGURE 0.2 – Allure des graphes de $P_{1/2}$, P_1 et P_2

3) On a vu dans la question 1) que si le taux de reproduction est positif, alors la population devient vite très grande et que, si ce taux est négatif, alors elle tend à s'éteindre rapidement. Ainsi l'on peut dire que dans l'exemple des poissons et en cas de pêche, ce taux va diminuer et devenir négatif si la pêche n'est pas responsable, entraînant ainsi une extinction de l'espèce considérée. L'idéal serait de maintenir un taux faible mais positif !

Exercice XIII.

- Considérons l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - (1+x)y' = 3 \tag{E}$$

On pose $z := y'$ et alors z vérifie l'équation du premier ordre

$$(1+x^2)z' - (1+x)z = 3 \tag{E'}$$

dont l'équation homogène

$$(1+x^2)z - (1+x)z = 0$$

admet pour solutions réelles

$$z_h(x) = ke^{\int \frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{d}t} = e^{\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}} = ke^{\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = ke^{\arctan(x)}\sqrt{1+x^2},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, on cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = ax + b$. On doit avoir

$$3 = (1+x^2)z_p'(x) - (1+x)z_p(x) = -(a+b)x + a - b \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b = 3 \\ a + b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

et on vérifie qu'effectivement, $z_p(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ satisfait l'équation. Ainsi, les solutions de (E') sont données par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = ke^{\arctan(x)}\sqrt{1+x^2} + \frac{3}{2}(x-1),\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver y, il ne reste qu'à intégrer z :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = k\int_0^x e^{\arctan(t)}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \frac{3}{4}(x^2 - 2x) + \ell,\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

- Considérons l'équation différentielle

$$xy^2 + 2yy' = x^2 \tag{E}$$

On pose ici $z := y^2$. L'équation devient, puisque $z' = 2yy'$,

$$xz + z' = x^2 \tag{E'}$$

Son équation homogène associée est

$$z' + xz = 0$$

et admet les solutions

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z_h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, la méthode de variation de la constante donne $k'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2$, d'où $k'(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pour intégrer ceci, on effectue une intégration par parties

$$\int_0^x t^2 e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left[te^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

et on obtient alors les solutions de (E')

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \left(k - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t\right) e^{-\frac{x^2}{2}} + x,\ k \in \mathbb{R}.$$

Au final, les solutions de (E) sont alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \pm\sqrt{x + \left(k - \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t\right) e^{-\frac{x^2}{2}}},\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice XIV.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(2).$$

Comme on a $f'(x) = f(0) + f(2) - f(x)$ pour tout x, la fonction f' est dérivable et on a

$$f'' + f' = 0$$

ce qui entraîne que $f'(x) = ke^{-x}$ pour un $k \in \mathbb{R}$ et ceci implique que f s'écrive

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ke^{-x} + \ell,\ k, \ell \in \mathbb{R}.$$

L'équation entraîne que $f'(0) = f(2)$, donc $-k = ke^{-2} + \ell$, soit $k = \frac{\ell}{-1-e^{-2}}$. La fonction f doit donc sécrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k(e^{-x} - 1 - e^{-2}),\ k \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si f s'écrit ainsi, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = k(-1 - e^{-2}) = -ke^{-2} - k = f(0) + f(2).$$

Ainsi, les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$f' + f = f(0) + f(2)$$

s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k(e^{-x} - e^{-2} - 1),\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice XV.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable vérifiant l'hypothèse de l'énoncé. L'équation de la tangente en x_0 est $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, donc le point d'intersection de T_{x_0} avec l'axe des ordonnées à pour coordonnées $(0, -x_0 f'(x_0) + f(x_0))$, i.e. $P(x) = f(x) - xf'(x)$. Dire que l'origine est le milieu du segment d'extrémitées $(0, P(x))$ et $(0, f(x))$ signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = \frac{f(x)+P(x)}{2} = \frac{2f(x)-xf'(x)}{2}$. Ainsi, f doit vérifier l'équation différentielle

$$-xy' + 2y = 0.$$

Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = k_1 e^{2\ln|x|} = k_1 x^2,\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

De même, les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_-^*$ s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = k_2 e^{2\ln|x|} = k_2 x^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

Pour que les deux solutions se recollent en 0, il faut et il suffit que $k_1 = k_2 =: k$ et alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = kx^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si $f : x \mapsto kx^2$ est une telle fonction, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x) + P(x)}{2} = \frac{2kx^2 - 2kx^2}{2} = 0,$$

donc l'origine est bien le milieu du segment d'extrémitées $(0, P(x))$ et $(0, f(x)$, avec $P(x)$ le point d'intersection de la tangente en x avec l'axe des ordonnée. Ainsi, les fonctions vérifiant cette condition sont exactement les multiple de la fonction carré $x \mapsto x^2$. Voici une illustration :

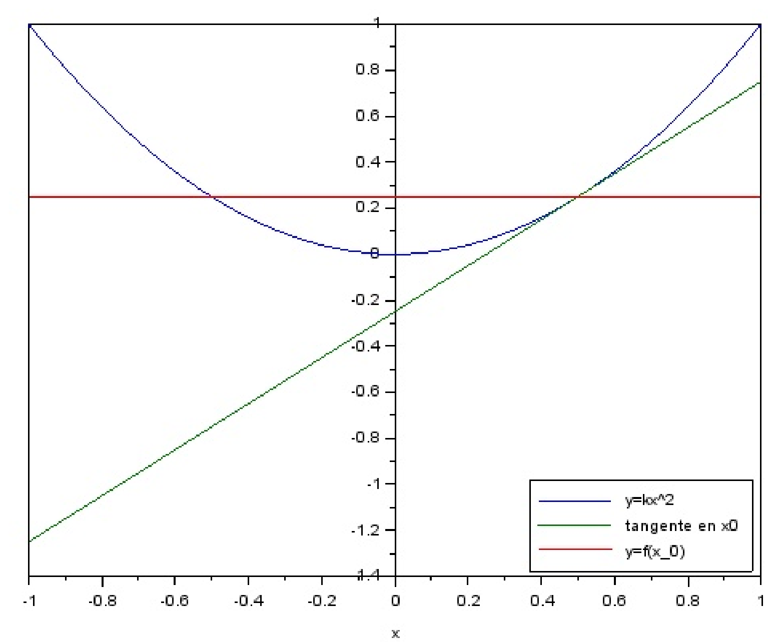

Figure 0.3 – Illustration du phénomène