Exercice I(N1)

Résoudre les équations différentielles suivantes. On suivra le plan usuel de résolution
Ecrire l'équation homogène associée. Ecrire puis résoudre l'équation caractéristique.
Donner la solution générale de l'équation homogène associée. Rechercher une solution particulière de l'équation. Donner la solution générale de l'équation.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2, \quad y'' - 4y' + 3y = \cos(x), \quad y'' + 4y' + 4y = e^x$$

$$y'' + y' + y = \cos(3x), \quad y'' - y' - 6y = xe^{-2x}, \quad y'' - 2y = \cosh(x)t$$

Exercice II (N1)

Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner- si elle existe- la solution sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x_0) = a$ et $f'(x_1) = b$

$$y'' + 2y' + y = x^3 + 1, \quad x_0 = x_1 = 1, \quad a = 1, b = 2$$

$$y'' + 3y' - y = (x - 1)e^x, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, a = 1, b = 1$$

Exercice III (Physique)(N2)

On considère une masse suspendue au bout d'un ressort. La position y de cette masse peut être repérée sur un axe parallèle à l'axe du ressort est commandé par l'équation

$$y'' + \gamma y' + cy = 0$$

$y = 0$ est une solution (la masse est immobile) est une position d'équilibre. Un équilibre (une solution constante égale à 0) est stable lorsqu'une solution non nulle φ satisfait $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$, il est instable sinon.

1) Ici cy correspond à une force de rappel ($c > 0$) et $\gamma y'$ à une force de frottement ($\gamma > 0$).

la position d'équilibre est elle stable ou instable?

2) Que dire de l'équilibre si $c < 0$? si $\gamma < 0$?

Exercice IV (N3)

Soit $(E) : x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3$

1) a) Quelle est l'équation homogène (EH) associée à (E) ?

b) Déterminer les solutions polynômiale de (EH) ?

2) Trouver les solutions de (EH) .

3) Trouver les solutions de (E) .

Exercice V (N3)

Soit l'équation $(E) : x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

1) Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ on pose $z(x) = y(e^x)$. Montrer que cette formule définit une fonction z deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ et exprimer ses dérivées première et seconde à l'aide des dérivées première et seconde de y .

2) Déterminer une équation du second ordre linéaire à coefficients constant dont les fonctions z sont solutions.

3) Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$