

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Dans tous les exercices, la lettre P désigne un plan réel euclidien, $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions réels et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur n lettres.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z , iz et i soient alignés.

Exercice 2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et A, B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = \lambda.$$

Exercice 3. Soient A le point d'affixe $1+i$ et B le point d'affixe $-1+2i$. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que le triangle ABM soit équilatéral.

Exercice 4. 1. Donner l'équation complexe du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $2+i$ et de rayon $\sqrt{5}$. Même question avec le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $3i$ et de rayon 1. Déterminer l'intersection $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

2. Donner l'équation complexe de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points d'affixes α et β .

3. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de centre $1+i$ et de rayon 1 et $\mathcal{D}$ la droite passant par les points d'affixes 1 et i . Déterminer les images de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par chacune des transformations suivantes

(a) $f : z \mapsto \sqrt{2}(1-i)z + i$,

(b) $g : z \mapsto (1+i)\overline{z+i}$.

4. Fixons $\omega \in \mathbb{C}^\times$ et $k \in \mathbb{R}$. Trouver l'équation complexe des droites orthogonales à la droite d'équation $\omega\bar{z} + \overline{\omega}z = k$.

Exercice 5. Considérons les transformations

$$f : z \mapsto -i\bar{z} + 1 + i, \quad g : z \mapsto i\bar{z} - 1 + i.$$

1. Déterminer les points fixes de f et ceux de g . Déterminer aussi l'ensemble des points fixes par f et g , simultanément.

2. Quelle sont la nature et les paramètres de la transformation $f \circ g$.

Exercice 6. Soient Ω un point du plan P , $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $i := i_{\Omega,k}$ l'inversion de P , de centre Ω et de puissance k .

1. Soient $M, N \in P \setminus \{\Omega\}$. Montrer que les points $M, N, i(M), i(N)$ sont cocycliques ou alignés.

2. En déduire que si un cercle $\mathcal{C}$ contient un point M et son inverse $i(M)$, alors il est globalement invariant (i.e. $i(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$).

Exercice 7. (*Homographies et groupe projectif linéaire*)

Notons $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. On rappelle que l'on peut prolonger une homographie $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ en une bijection $\widehat{h}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$, encore appelée *homographie*, en posant

$$\widehat{h}|_{\mathbb{C}} := h, \quad \widehat{h}\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad \widehat{h}(\infty) := \frac{a}{c}.$$

On note alors $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$.

1. Construire un morphisme surjectif

$$\varphi : GL_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}.$$

2. Calculer le noyau de φ et en déduire que $\mathcal{H}$ est isomorphe à un quotient de $GL_2(\mathbb{C})$.

Exercice 8. Dans cet exercice, on oublie que l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ existe.

1. Soient K un corps et A un K -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, muni d'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit aussi $\nu : A \times A \rightarrow A$ une loi de composition interne bilinéaire.

- a) Montrer que, pour prouver l'associativité ou la commutativité de ν , il suffit de montrer que

$$\forall 1 \leq i, j, k \leq n, \nu(\nu(e_i, e_j), e_k) = \nu(e_i, \nu(e_j, e_k)).$$

- b) Soit $\varphi : A \rightarrow A$ une application linéaire. Montrer que φ est un homomorphisme relativement à ν si et seulement si

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \varphi(\nu(e_i, e_j)) = \nu(\varphi(e_i), \varphi(e_j)).$$

2. Notons $1, i, j, k$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et posons

$$i^2 = j^2 = k^2 := -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

ainsi que

$$\forall u \in \mathbb{R}^4, u \cdot 1 = 1 \cdot u := u.$$

On étend ce produit par bilinéarité à $\mathbb{R}^4$ et on note $\mathbb{H}_0 := \mathbb{R}^4$, muni de ce produit. On se propose de montrer qu'il munit $\mathbb{H}_0$ d'une structure d'algèbre associative unitaire réelle.

- a) Soit $\sigma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'automorphisme $\mathbb{R}$ -linéaire défini par $\sigma(1) = 1$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = k$ et $\sigma(k) = i$. Montrer que σ est un automorphisme de $\mathbb{H}_0$.
- b) Même question pour $\tau : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, défini par $\tau(1) = 1$, $\tau(i) = -i$, $\tau(j) = k$ et $\tau(k) = j$.
- c) Montrer que la vérification de l'associativité sur $\mathbb{H}_0$ se ramène à cinq cas (au lieu de vingt-sept), conclure.

Exercice 9. 1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des quaternions purs. Montrer que

$$\forall q \in \mathbb{H}, q \in \mathcal{P} \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-.$$

2. Montrer également que

$$\forall q \in \mathbb{H}, q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_+.$$

3. Montrer que tout quaternion est produit de deux quaternions purs (*indication : utiliser l'exercice 2 du TD4*).
4. Montrer que la transposition sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ ne préserve pas le groupe $GL_2(\mathbb{H})$ (*indication : considérer la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$*).

Exercice 10. (Une construction de $\mathbb{H}$)

Soit $q \in \mathbb{H}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} T_q & : & \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ & & q' \mapsto qq' \end{array}$$

1. Montrer que T_q est $\mathbb{R}$ -linéaire et déterminer sa matrice dans la base $(1, i, j, k)$ de $\mathbb{H}$.
2. Donner les matrices de T_i , T_j et T_k .

3. Posons

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathbb{H}$.

Exercice 11. (Automorphismes de $\mathbb{H}$)

Rappelons que l'on note N la norme sur $\mathbb{H}$, puis

$$G := \{q \in \mathbb{H}^\times ; N(q) = 1\}.$$

Définissons

$$\forall (q, q') \in G \times \mathbb{H}, S_q(q') := qq'q^{-1} = qq'\bar{q},$$

ainsi que $P = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ l'espace des quaternions purs. Notons encore $s_q := S_{q|P}$ la restriction de S_q à P .

On va montrer que tout automorphisme de $\mathbb{H}$ est *intérieur*, c'est-à-dire de la forme S_q , pour un $q \in G$. Soit donc $u \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ un automorphisme de corps de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que $u|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des quaternions purs est stable par u et que u conserve la norme sur $\mathcal{P}$.
3. Posons $i' := u(i)$, $j' := u(j)$ et $k' := u(k)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $(i', j', \varepsilon k')$ soit une base orthonormée directe de P .
4. En déduire qu'il existe $q \in G$ tel que

$$s_q(i) = i', \quad s_q(j) = j', \quad s_q(k) = \varepsilon k'.$$

(indication : on pourra utiliser le morphisme surjectif $s : G \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$.)

5. Conclure.

Exercice 12. (Quaternions généralisés)

Soient $\mathbb{k}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2 (i.e. dans $\mathbb{k}$, on a $1 + 1 \neq 0$) et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^\times$. On note $(1, i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{k}^4$ et on définit un produit sur $\mathbb{k}^4$ en étendant par bilinéarité les relations suivantes et en décrétant que 1 est neutre,

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad ij = -ji = k.$$

On note de plus $\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$ l'ensemble $\mathbb{k}^4$, muni de ce produit.

1. Montrer que $\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$ est une algèbre associative.
2. Définir une conjugaison et une norme N sur $\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$.
3. Montrer que le centre de $\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$ est isomorphe à $\mathbb{k}$.
4. Montrer que, si $\mathbb{k}$ est algébriquement clos, alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{H}_{\alpha, \beta} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{k}).$$

indication : considérer a (resp. b) une racine carrée de α (resp. β) dans $\mathbb{k}$ et considérer $\varphi : \mathbb{H}_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$ tel que $\varphi(i) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ et $\varphi(j) := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

5. Montrer que $\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$ est une algèbre à division si et seulement si la forme quadratique N est *anisotrope* (i.e. telle que que $N(q) = 0 \Rightarrow q = 0$).

6. Si $\mathbb{k}$ est un corps fini, montrer que $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre (on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : Sur un corps fini, toute forme quadratique de dimension ≥ 3 est isotrope).

Exercice 13. (Espace projectif réel et rotations de l'espace : un peu de topologie)

Considérons, sur $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* ; y = \lambda x$$

et notons le quotient

$$\mathbb{RP}^3 := (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) / \sim,$$

ainsi que la projection canonique

$$\pi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^3.$$

On munit $\mathbb{RP}^3$ de la *topologie quotient*, i.e. $U \subset \mathbb{RP}^3$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, au sens usuel. L'espace topologique ainsi obtenu $\mathbb{RP}^3$ est alors appelé *espace projectif réel*.

Notons encore $G := \{q \in \mathbb{H} ; N(q) = 1\}$ le groupe des quaternions de norme 1.

1. Rappeler rapidement la construction du morphisme surjectif

$$s : G \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$$

tel que

$$\bar{s} : G/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

soit un isomorphisme de groupes. On admettra qu'en munissant $G/\{\pm 1\}$ de la topologie quotient, le morphisme $\bar{s}$ est aussi un homéomorphisme. On parle alors d'isomorphisme de groupes topologiques.

2. Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} &\rightarrow G \\ (a, b, c, d) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}(a + bi + cj + dk) \end{aligned}$$

Montrer que f est continue (on munit bien-sûr $\mathbb{R}^4$ de la norme usuelle et $\mathbb{H}$ de la métrique d induite par $\sqrt{N}$, i.e. $d(q, q') = \sqrt{N(q - q')}$).

3. Montrer que f passe au quotient et définit une application continue

$$\bar{f} : \mathbb{RP}^3 \rightarrow G/\{\pm 1\},$$

où $G/\{\pm 1\}$ est aussi muni de la topologie quotient (*indication : pour montrer que $\bar{f}$ est continue, prendre un ouvert U de $G/\{\pm 1\}$, considérer la projection $\pi' : G \rightarrow G/\{\pm 1\}$ et observer que, par construction, on a $\pi' \circ f = \bar{f} \circ \pi$. En déduire que $\bar{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^3$).*

4. Montrer qu'en fait, $\bar{f}$ est un homéomorphisme.
5. En déduire que les espaces $\mathbb{RP}^3$ et $SO_3(\mathbb{R})$ sont homéomorphes.

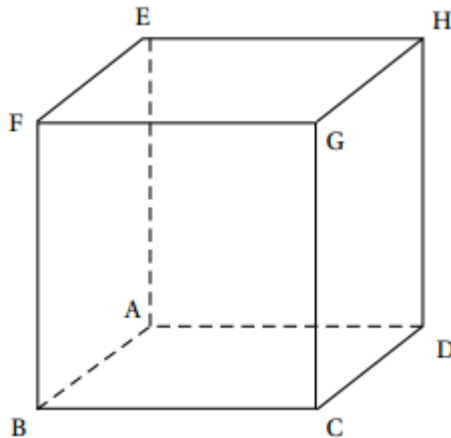
Exercice 14. (Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le groupe diédral $\mathcal{D}_n$ comme étant le sous-groupe de $SO_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation ρ_n de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées. σ

- Montrer que l'on a la relation $\rho_n^{-1} = \sigma \rho_n \sigma^{-1}$.
- Montrer que $\mathcal{D}_n$ est fini d'ordre $2n$.
- Soit G un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$, d'ordre n . Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Soit G un sous-groupe fini de $O_2(\mathbb{R})$ et supposons que G contienne un anti-déplacement s . Montrer que G est isomorphe à $\mathcal{D}_n$ (*indication : considérer $G^+ := G \cap SO_2(\mathbb{R}) =: \langle \rho \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et montrer que $G = G^+ \cup sG^+$. Montrer aussi que $(\rho s)^2 = id_P$*).
- En déduire que les groupes cycliques et diédraux sont les seuls sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15. (*Isométries du cube*)

Notons $\mathcal{K} = ABCDEFGH$ un cube dans $\mathbb{R}^3$, que l'on fixe. On note G^+ le groupe des isométries affines positives de $\mathbb{R}^3$ qui laissent $\mathcal{K}$ globalement invariant (i.e. les isométries positives $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que $f(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$). On va chercher à identifier G^+ .

Figure 1: Le cube $\mathcal{K}$

1. Si l'on considère $\mathcal{K}_0$ un cube de côté quelconque centré en 0 et G_0^+ le groupe des isométries positives laissant $\mathcal{K}_0$ globalement invariant, montrer que G^+ et G_0^+ sont isomorphes.
Dans la suite, on suppose donc que $\mathcal{K}$ est centré en 0 et de côté 1 et on note G^+ son groupe d'isométries positives.
2. Notons δ_1 (resp. $\delta_2, \delta_3, \delta_4$) la diagonale de $\mathcal{K}$ formée par le segment $[AG]$ (resp. $[BH], [CE], [DF]$) et $\Delta := \{\delta_i, 1 \leq i \leq 4\}$. Montrer que G^+ agit sur Δ et en déduire qu'il existe un morphisme de groupes

$$\psi : G^+ \rightarrow \mathfrak{S}_4.$$

3. Montrer que G^+ est un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$.
4. Soient $1 \leq i \neq j \leq 4$. Montrer qu'il existe $f \in G^+$ telle que $f(\delta_i) = \delta_j$, $f(\delta_j) = \delta_i$ et $f(\delta_k) = \delta_k$ pour $k \neq i, j$. En déduire que les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ sont dans l'image de ψ .
5. En déduire que ψ est surjectif.
6. Soit $f \in \ker \psi$ et supposons que $f(A) = G$ (ou, ce qui revient au même, que $f(G) = A$). Montrer que, dans ce cas on a

$$f(C) = E, \quad f(D) = F, \quad f(B) = H.$$

En déduire une absurdité et conclure que $f = id_{\mathbb{R}^3}$.

7. En déduire que ψ est un isomorphisme.
8. Prouver que le groupe $\tilde{G}$ des isométries, positives ou non, de $\mathbb{R}^3$ qui laissent $\mathcal{K}$ globalement invariant est isomorphe à

$$\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$